

Инженерная школа информационных технологий и робототехники
 01.03.02 Прикладная математика и информатика
 Отделение информационных технологий

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Тема работы
Исследование RQ-системы с модулированным пуассоновским входящим потоком и обратной связью

УДК 519.872

Студент

Группа	ФИО	Подпись	Дата
8Б71	Дорошенко Екатерина Андреевна		

Руководитель ВКР

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Профессор ОИТ ИШИТР	Гергет Ольга Михайловна	Д. Т. Н., профессор.		

КОНСУЛЬТАНТЫ ПО РАЗДЕЛАМ:

По разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент ОСГН ШБИП	Трубченко Татьяна Григорьевна	к.э.н., доцент		

По разделу «Социальная ответственность»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Ассистент	Черемискина Мария Сергеевна	-		

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:

Руководитель ООП	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
01.02.03 Прикладная математика и информатика	Шевелев Геннадий Ефимович	к.ф.-м.н., доцент		

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ООП 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Код результата	Наименование результата
Профессиональные компетенции	
Р1	Применять глубокие математические и профессиональные знания для решения задач научно-исследовательской, проектной, производственной и технологической деятельности в области системного и прикладного программирования.
Р2	Умение использовать знания по естественнонаучным дисциплинам при определении задач математического моделирования объектов и явлений в различных предметных областях
Р3	Демонстрировать понимание сущности и значения информации в развитии современного общества, владение основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации; использование для решения коммуникативных задач современных технических средств и информационных технологий.
Р4	Выполнять инновационные проекты с применением глубоких профессиональных знаний и эффективных методов проектирования для достижения новых результатов, обеспечивающих конкурентные преимущества в условиях экономических, экологических, социальных и других ограничений.
Р5	Демонстрировать знание о формах организации образовательной и научной деятельности в высших учебных заведениях, иметь навыки преподавательской работы.
Р6	Способность осуществлять организационно-управленческую и социально-ориентированную деятельность с соблюдением профессиональной этики
Универсальные компетенции	
Р7	Активно владеть иностранным языком на уровне, позволяющем работать в интернациональной среде, включая разработку документации и представление результатов инновационной деятельности. Толерантность в восприятии социальных и культурных различий.
Р8	Эффективно работать индивидуально, в качестве члена и руководителя группы, состоящей из специалистов различных направлений и квалификаций, демонстрировать ответственность за результаты работы и готовность следовать корпоративной культуре организации
Р9	Самостоятельно учиться и непрерывно повышать квалификацию в течение всего периода профессиональной деятельности. Способность к интеллектуальному, культурному, нравственному и профессиональному саморазвитию.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Томский политехнический университет» (ТПУ)

Инженерная школа информационных технологий и робототехники
01.03.02 Прикладная математика и информатика
Отделение информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ:
Руководитель ООП

(Подпись) (Дата)

Шевелев Г.Е
(Ф.И.О.)

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

В форме:

Бакалаврской работы

(бакалаврской работы, дипломного проекта/работы, магистерской диссертации)

Студенту:

Группа	ФИО
8Б71	Дорошенко Екатерине Андреевной

Тема работы:

Исследование RQ-системы с модулированным пуассоновским входящим потоком и обратной связью	
Утверждена приказом директора (дата, номер)	№ 32-3/с от 01.02.2021
Срок сдачи студентом выполненной работы:	

ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ:

Исходные данные к работе	<ul style="list-style-type: none"> – руководство по языку программирования Python; – литературные источники по исследованию систем массового обслуживания (СМО)
--------------------------	---

Перечень подлежащих исследованию, проектированию и разработке вопросов	<ul style="list-style-type: none"> – изучить особенности RQ-систем; – изучить методы исследования СМО; – построить математическую модель RQ-систем $M^n M 1$ и $MMPP M 1$; – получить стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите; – выполнить асимптотический анализ СМО в условиях большой задержки на орбите; – разработать алгоритм для реализации имитационной модели и написать программу на языке Python; – сравнить распределения вероятностей, полученные разными методами.
Перечень графического материала	<ul style="list-style-type: none"> – графики, представляющие распределение вероятностей; – блок-схемы алгоритмов; – изображения полученные в результате работы программы.
Консультанты по разделам выпускной квалификационной работы	
Раздел	Консультант
Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение	Трубченко Татьяна Григорьевна, доцент ОСГН ШБИП
Социальная ответственность	Черемискина Мария Сергеевна, ассистент

Дата выдачи задания на выполнение выпускной квалификационной работы по линейному графику	
---	--

Задание выдал руководитель:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Профессор ОИТ ИШИТР	Гергет Ольга Михайловна	д. т. н, профессор.		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
8Б71	Дорошенко Екатерина Андреевна		

**ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАЗДЕЛА
«ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСОЭФФЕКТИВНОСТЬ И
РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ»**

Студенту:

Группа	ФИО
8Б71	Дорошенко Екатерине Андреевне

Школа	ИШИТР	Отделение школы (НОЦ)	ОИТ
Уровень образования	Бакалавриат	Направление/специальность	01.03.02 Прикладная математика и информатика

Исходные данные к разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»:

1. Стоимость ресурсов научного исследования (НИ): материально-технических, энергетических, финансовых, информационных и человеческих	Использовать действующие ценники и договорные цены на потребленные материальных и информационных ресурсы, а также указанную в МУ величину тарифа на эл. энергию
2. Нормы и нормативы расходования ресурсов	—
3. Используемая система налогообложения, ставки налогов, отчислений, дисконтирования и кредитования	Действующие ставки единого социального налога и НДС (см. МУ)

Перечень вопросов, подлежащих исследованию, проектированию и разработке:

1. Планирование процесса управления НТИ: структура и график проведения, бюджет, риски и организация закупок	Построение плана-графика выполнения ВКР, составление соответствующей сметы затрат, расчет величины НДС и цены результата ВКР. Оценка экономической эффективности внедрения результатов ВКР.
---	---

Перечень графического материала (с точным указанием обязательных чертежей):

1. <u>Линейный график работ</u>
2. <u>Смета на разработку проекта</u>

Дата выдачи задания для раздела по линейному графику	11.05.2021
---	-------------------

Задание выдал консультант:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент ОСГН ШБИП	Трубченко Татьяна Григорьевна	к.э.н., доцент		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
8Б71	Дорошенко Екатерина Андреевна		

ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАЗДЕЛА «СОЦИАЛЬНАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ»

Студенту:

Группа	ФИО
8Б71	Дорошенко Екатерина Андреевна

Школа	ИШИТР	Отделение (НОЦ)	ОИТ
Уровень образования	Бакалавриат	Направление/специальность	01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Тема ВКР:

Исследование RQ-системы с модулированным пуассоновским входящим потоком и обратной связью	
Исходные данные к разделу «Социальная ответственность»:	
1. Характеристика объекта исследования (вещество, материал, прибор, алгоритм, методика, рабочая зона) и области его применения	<p>Объект исследования – RQ–система.</p> <p>Область применения – телекоммуникационные системы</p>
Перечень вопросов, подлежащих исследованию, проектированию и разработке:	
1. Правовые и организационные вопросы обеспечения безопасности: <ul style="list-style-type: none"> – специальные (характерные при эксплуатации объекта исследования, проектируемой рабочей зоны) правовые нормы трудового законодательства; – организационные мероприятия при компоновке рабочей зоны. 	<p>-Трудовой кодекс Российской Федерации;</p> <p>-ГОСТ 12.2.032-78 «ССБТ. Рабочее место при выполнении работ сидя» [2];</p> <p>- ГОСТ 12.2.061-81 «ССБТ. Оборудование производственное. Общие требования безопасности к рабочим местам» [3]</p>
2. Производственная безопасность: 2.1. Анализ выявленных вредных и опасных факторов 2.2. Обоснование мероприятий по снижению воздействия	<p>2.1. Анализ вредных факторов:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Отклонение показателей микроклимата; - Статические физические перегрузки; - Нервно-психические перегрузки; - Повышенный уровень шума; - Недостаточная освещенность рабочей зоны; -Повышенный уровень электромагнитных излучений <p>2.2. Анализ опасных факторов:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Опасность поражения электрическим током; - Опасность возникновения пожара вследствие короткого замыкания;
3. Экологическая безопасность:	<p>Воздействие на литосферу: неправильная утилизация использованной оргтехники, бумаги, канцелярии, люминесцентных ламп и т.д. Влияние на атмосферу: парниковых газов, выделяющихся из жидкокристаллических мониторов. Влияние на гидросферу: загрязнение источников воды свалками и</p>

	химическими захоронениями оргтехники.
4. Безопасность в чрезвычайных ситуациях:	Техногенные ЧС: -возникновение пожара; -поражение электрическим током; Природные ЧС: -землетрясение; -природные пожары; Биолого-социальные ЧС: -эпидемии; -терроризм; -войны

Дата выдачи задания для раздела по линейному графику	10.02.2020
---	-------------------

Задание выдал консультант:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Ассистент	Черемискина Мария Сергеевна	-		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
8Б71	Дорошенко Екатерина Андреевна		

Реферат

Выпускная квалификационная работа содержит 83 страниц машинописного текста, 17 таблиц, 14 рисунков, 1 список использованных источников из 21 наименования.

Ключевые слова: RQ-система, имитационная модель, производящая функция, характеристическая функция, асимптотический анализ.

Цель работы: исследование RQ-систем с обратной связью вида $M|M^n|1$ и $MMPP|M|1$ с использованием аналитических методов, численных методов и метода асимптотического анализа, сравнение и анализ полученных результатов.

В данной работы было проведено исследование RQ-систем с обратной связью вида $M|M^n|1$ и $MMPP|M|1$. В качестве методов исследования были выбраны аналитические методы (метод производящей и характеристической функции), численные методы (матричный метод, использование имитационной модели) и метод асимптотического анализа. После проведения расчетов характеристик систем выбранными методами было проведено сравнение полученных результатов, получена оценка точности работы алгоритмов.

Оглавление

Введение	10
1. Математические модели RQ-систем	12
1.1 RQ-система $M^n M 1$	12
1.2 RQ-система $MMPP M 1$	14
2. Аналитические методы исследования RQ-систем	16
2.1 Метод производящей функции	16
2.2 Метод характеристической функции	18
3. Численные методы исследования RQ-систем	21
3.1 Матричный метод	21
3.2 Исследование RQ-системы $M^n M 1$ с использованием имитационной модели	23
3.3 Исследование RQ-системы $MMPP M 1$ с использованием имитационной модели	26
4. Асимптотический анализ	28
4.1 Исследование RQ-системы $M^n M 1$	28
Асимптотика первого порядка	28
4.2 Исследование RQ-системы $MMPP M 1$	34
5. Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение	43
5.1 Организация и планирование работ	43
5.2 Расчет сметы затрат на выполнение проекта	48
5.3 Выводы по разделу	53
6. Социальная ответственность	54
6.1 Правовые и организационные вопросы обеспечения безопасности	54
6.2 Производственная безопасность	55
6.3 Экологическая безопасность	63
6.4 Безопасность в чрезвычайных ситуациях	64
6.5 Выводы по разделу	65
Заключение	66
Приложение А	70
Приложение Б	74
Приложение В	78

Введение

Одним из важных разделов математического моделирования является теория массового обслуживания, представляющая собой теоретические основы комплекса вопросов эффективности конструирования и эксплуатации систем массового обслуживания.

Предметом изучения теории массового обслуживания является система массового обслуживания (СМО) – система, реализующая многократное выполнение достаточно однотипных задач. Цель теории массового обслуживания – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО.

Различные модели теории массового обслуживания часто используются как математические модели экономических, технических и реальных информационных систем. В частности, финансовые системы и процессы страхования моделируются как СМО с бесконечным количеством устройств обслуживания, производственные системы моделируются как однолинейные и многопоточные СМО с очередью, а телекоммуникационные системы - как системы с повторными вызовами (Retrial Queue Systems или RQ-системы).

В реальной жизни мы часто сталкиваемся с ситуациями повторного обращения заявок к обслуживающему прибору. Такие ситуации и описывают RQ-системы. Такие системы используют как для анализа и исследования процессов работы телекоммуникационных и компьютерных систем, так и для проектирования мобильных сотовых радиосетей и др. [11].

Изучению систем с повторными вызовами посвящено значительное количество современных исследований. В статье [12] предлагается исследование марковской модели RQ-системы с вызываемыми заявками, реализован рекуррентный алгоритм для нахождения распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов.

В [13, 14] предлагаются марковские модели полилинейных RQ-систем с вызываемыми заявками, исследование которых проводится с помощью методов линейной алгебры.

Не всегда удастся найти параметры системы аналитическими методами (например, в условии большой задержки заявок на орбите). В таких случаях для оценки параметров системы применяются методы асимптотического анализа [15, 16].

Потоки в реальных системах, как правило, не являются пуассоновскими, стационарными или потоками без последствия. В некоторых случаях использование моделей с пуассоновскими потоками приводит к искажению характеристик функционирования рассматриваемой системы (например, при исследовании СМО с бесконечным числом приборов). Наиболее приближенными к реальным условиям являются модулированные пуассоновские потоки (МР-потоки).

Системы с входящим MMPP потоком рассматриваются в ряде работ. Например, в [17], [18] рассматривается RQ-система MMPP|M|1 и производится ее исследование в условиях большой загрузки. Работы [19], [20] исследуют MMPP системы с бесконечным числом обслуживающих приборов при растущем времени обслуживания. В [21] рассматривается система MMPP|M|1 с немедленной обратной связью при условии двух состояний цепи Маркова, управляющей потоком поступающих заявок.

В настоящей работе рассматриваются RQ-системы с обратной связью вида $M|M^n|1$ и MMPP|M|1. Целью работы является асимптотический, численный и аналитический анализ RQ-систем вида $M^n|M|1$, MMPP|M|1 с обратной связью. В качестве методов исследования выступают аналитические методы (методы производящей и характеристической функции), численные методы (матричный метод, использование имитационной модели) и метод асимптотического анализа.

1. Математические модели RQ-систем

1.1 RQ-система $M^n | M | 1$

Рассмотрим СМО (рис. 1) с одним обслуживающим устройством, на вход которой поступает пуассоновский неординарный поток заявок с параметром λ . Пусть события появляются в моменты t_1, t_2, t_3, \dots «пачками», так что в момент t_k появляются сразу η_k событий. Будем считать, что η_k событий есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением $P\{\eta_k = n\} = q_n$. Если обслуживающий прибор свободен, то заявка из пачки поступает на обслуживание, в противном случае заявка попадает на орбиту. Время обслуживания заявки является случайной величиной, имеющей экспоненциальный закон распределения с параметром μ . Заявка, обслуживание которой завершено, может покинуть систему с вероятностью r_0 , повторно поступить на обслуживание с вероятностью r_1 или перейти на орбиту с вероятностью r_2 . Заявки ожидают повторного обслуживания в течение времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром σ .

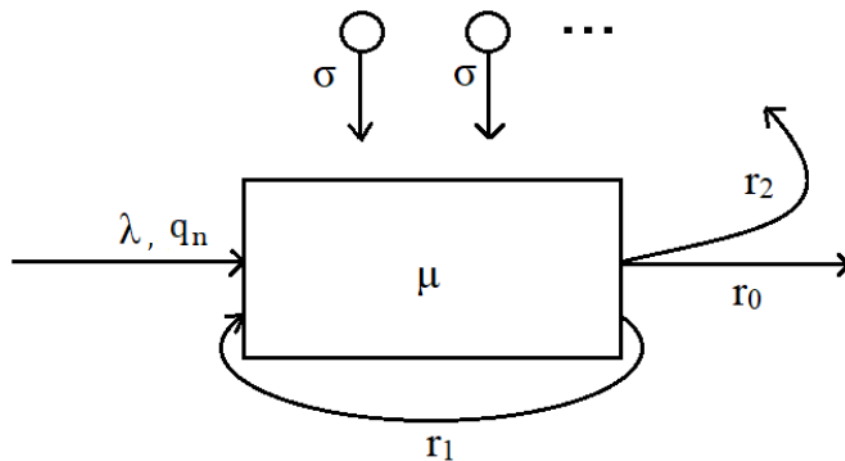


Рисунок 1. Схема системы $M^n | M | 1$

Пусть случайный процесс $i(t)$ есть число заявок на орбите в момент времени t , а $n(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$\begin{cases} 0, \text{свободен;} \\ 1, \text{занят.} \end{cases}$$

Двумерный процесс $\{i(t), n(t)\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем. Требуется найти распределение вероятностей числа заявок на орбите с учетом состояния прибора $P_n(i, t) = P\{n(t) = n, i(t) = i\}$, $n = 0, 1; i = 0, 1, 2, \dots$

Для распределения вероятностей $P_n(i, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Для получения системы воспользуемся Δt -методом. Выразим вероятности $P_i(t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$ через вероятности $P_i(t)$ в момент времени t и вероятности переходов в состояние i за бесконечно малый промежуток времени Δt . Получим:

$$\begin{cases} P_0(i, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) P_0(i, t) + (1 - i \sigma \Delta t) P_0(i, t) + r_0 \mu \Delta t P_1(i, t) + r_2 \mu \Delta t P_1(i - 1, t) + o(\Delta t), \\ P_0(i, t + \Delta t) = (1 - r_0 \mu \Delta t) P_1(i, t) + (1 - r_2 \mu \Delta t) P_1(i, t) + (1 - \lambda \Delta t) P_1(i, t) + \\ + \sum_{k=1}^{i+1} (\lambda \Delta t q_k P_0(i - k + 1, t)) + (i + 1) \sigma \Delta t P_0(i + 1, t) + \sum_{k=1}^i (\lambda \Delta t q_k P_1(i - k, t)) + o(\Delta t); \\ \frac{\partial P_0(i, t)}{\partial t} = -(\lambda + i \sigma) P_0(i, t) + r_0 \mu P_1(i, t) + \mu r_2 P_1(i - 1, t); \\ \frac{\partial P_1(i, t)}{\partial t} = -(r_0 \mu + \mu r_2 + \lambda) P_1(i, t) + \sum_{k=1}^{i+1} (\lambda q_k P_0(i - k + 1, t)) + (i + 1) \sigma P_0(i + 1, t) + \\ + \sum_{k=1}^i (\lambda q_k P_1(i - k, t)). \end{cases}$$

Затем от полученных равенств переходим к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Для нашей СМО система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(i, t)}{\partial t} = -(\lambda + i \sigma) P_0(i, t) + r_0 \mu P_1(i, t) + \mu r_2 P_1(i - 1, t); \\ \frac{\partial P_1(i, t)}{\partial t} = -(r_0 \mu + \mu r_2 + \lambda) P_1(i, t) + \sum_{k=1}^{i+1} (\lambda q_k P_0(i - k + 1, t)) + (i + 1) \sigma P_0(i + 1, t) + \\ + \sum_{k=1}^i (\lambda q_k P_1(i - k, t)). \end{cases} \quad (1)$$

Запишем систему уравнений для стационарного режима:

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma)P_0(i) + r_0\mu P_1(i) + r_2\mu P_1(i-1) = 0, \\ -(r_0\mu + r_2\mu + \lambda)P_1(i) + \sum_{k=1}^{i+1} (\lambda q_k P_0(i-k+1)) + (i+1)\sigma P_0(i+1) + \sum_{k=1}^i (\lambda q_k P_1(i-k)) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

1.2 RQ-система MMPP | M | 1

Рассмотрим СМО (рис. 2) с одним обслуживающим устройством, на вход которой поступает марковский модулированный пуассоновский поток заявок (MMPP) с конечным числом состояний K , заданный матрицей инфинитезимальных характеристик Q и диагональной матрицей Λ условных интенсивностей λ_k , где $k=1..K$. Если обслуживающий прибор свободен, то пришедшая заявка поступает на обслуживание, в противном случае заявка попадает на орбиту. Время обслуживания заявки является случайной величиной, имеющей экспоненциальный закон распределения с параметром μ . Заявка, обслуживание которой завершено, может покинуть систему с вероятностью r_0 , повторно поступить на обслуживание с вероятностью r_1 или перейти на орбиту с вероятностью r_2 . На орбите заявки ожидают повторного обслуживания в течение времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром σ .

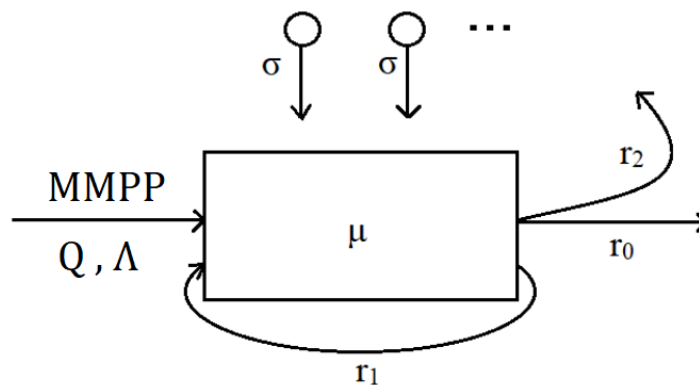


Рисунок 2. Схема системы MMPP | M | 1

Пусть случайный процесс $i(t)$ есть число заявок на орбите в момент времени t , $k(t)$ – цепь Маркова, управляющая MMPP-поток с конечным

числом состояний $1, \dots, K$, а $n(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$\begin{cases} 0, \text{свободен;} \\ 1, \text{занят.} \end{cases}$$

Тогда процесс $\{i(t), k(t), n(t)\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем. Требуется найти стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите.

Обозначим $P_n(i, k) = P\{n(t) = n, k(t) = k, i(t) = i\}$, $n = 0, 1; i = 0, 1, 2, \dots; k = 1 \dots K$. Для получения системы дифференциальных уравнений Колмогорова воспользуемся Δt -методом. Выразим вероятности $P_n(i, k, t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$ через вероятности $P_n(i, k, t)$ в момент времени t и вероятности переходов в состояние i за бесконечно малый промежуток времени Δt . Получим:

$$\begin{cases} P_0(i, k, t + \Delta t) = P_1(i, k, t) \cdot r_0 \mu \Delta t + P_1(i - 1, k, t) \cdot \mu r_2 \Delta t + \\ + P_0(i, k, t)(1 - \lambda_k \Delta t)(1 - i \sigma \Delta t)(1 + q_{kk} \Delta t) + \sum_{m \neq k} q_{mk} \Delta t \cdot P_0(i, m, t), \\ P_1(i, k, t + \Delta t) = P_0(i, k, t) \cdot \lambda_k \Delta t + P_0(i + 1, k, t) \cdot (i + 1) \sigma \Delta t + P_1(i - 1, k, t) \cdot \lambda_k \Delta t + \\ + P_1(i, k, t)(1 - r_0 \mu \Delta t)(1 - \lambda_k \Delta t)(1 - r_2 \mu \Delta t)(1 + q_{kk} \Delta t) + \sum_{m \neq k} q_{mk} \Delta t \cdot P_1(i, m, t). \end{cases}$$

Затем от полученных равенств переходим к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Для нашей СМО система дифференциальных уравнений Колмогорова будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(i, k, t)}{\partial t} = -(\lambda_k + i \sigma) P_0(i, k, t) + r_0 \mu P_1(i, k, t) + \mu r_2 P_1(i - 1, k, t) + \sum_m q_{mk} P_0(i, m, t); \\ \frac{\partial P_1(i, k, t)}{\partial t} = -(r_0 \mu + r_2 \mu + \lambda_k) P_1(i, k, t) + \lambda_k P_1(i - 1, k, t) + \lambda_k P_0(i, k, t) + \\ + (i + 1) \sigma P_0(i + 1, k, t) + \sum_m q_{mk} P_1(i, m, t). \end{cases} \quad (3)$$

Запишем систему уравнений Колмогорова для стационарного режима:

$$\begin{cases} -(\lambda_k + i\sigma)P_0(i, k) + r_0\mu P_1(i, k) + \mu r_2 P_1(i-1, k) + \sum_m q_{mk} P_0(i, m) = 0, \\ -(r_0\mu + r_2\mu + \lambda_k)P_1(i, k) + \lambda_k P_1(i-1, k) + \lambda_k P_0(i, k) + (i+1)\sigma P_0(i+1, k) + \\ + \sum_m q_{mk} P_1(i, m) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

2. Аналитические методы исследования RQ-систем

2.1 Метод производящей функции

Рассмотрим решение системы (1) методом производящих функций.

Введем функцию $F(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P_i(t)$, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k q_k$ — производящая функция для

случайного числа заявок. Приведем исходную систему к виду:

$$\begin{cases} \frac{dF_0(z, t)}{dt} + z\sigma \frac{dF_0(z, t)}{dz} = -\lambda F_0(z, t) + r_0\mu F_1(z, t) + z\mu r_2 F_1(z, t), \\ \frac{dF_1(z, t)}{dt} - \sigma \frac{dF_0(z, t)}{dz} = \frac{\lambda}{z} f(z) F_0(z, t) - r_0\mu F_1(z, t) - \lambda F_1(z, t) + \\ + \lambda f(z, t) F_1(z, t) - \mu r_2 F_1(z, t). \end{cases}$$

Так как мы рассматриваем стационарный режим, то

$$\begin{cases} z\sigma \frac{dF_0(z, t)}{dz} = -\lambda F_0(z, t) + r_0\mu F_1(z, t) + z\mu r_2 F_1(z, t), \\ -\sigma \frac{dF_0(z, t)}{dz} = \frac{\lambda}{z} f(z) F_0(z, t) - r_0\mu F_1(z, t) - \lambda F_1(z, t) + \lambda f(z, t) F_1(z, t) - \mu r_2 F_1(z, t). \end{cases} \quad (5)$$

Домножив второе уравнение системы (5) на z и сложив первое и второе уравнение, получим

$$(\lambda(f(z) - 1))F_0(z) + (r_0\mu(z - 1) + \lambda z(f(z) - 1))F_1(z) = 0.$$

Из полученного уравнения выразим $F_1(z)$:

$$F_1(z) = -F_0(z) \left(\frac{\lambda(f(z) - 1)}{r_0\mu(1 - z) + \lambda z(f(z) - 1)} \right).$$

Подставим полученное значение в первое уравнение системы и выразим $F_0(z)$:

$$z\sigma \frac{dF_0(z)}{dz} = -\lambda F_0(z) + \left(\frac{r_0\mu\lambda(f(z)-1)}{r_0\mu(1-z) + \lambda z(f(z)-1)} \right) F_0(z) -$$

$$- \left(\frac{z\mu r_2\lambda(f(z)-1)}{r_0\mu(1-z) + \lambda z(f(z)-1)} \right) F_0(z);$$

$$\frac{dF_0(z)}{dz} = F_0(z) \left(\frac{\mu\lambda(f(z)-1)(r_0 + r_2z)}{z\sigma(r_0\mu(1-z) + \lambda z(f(z)-1))} + \frac{\lambda}{z\sigma} \right);$$

$$F_0(z) = F_0(1) \cdot \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma} \int_z^1 \left(\frac{(f(t)-1)(r_0 + r_2t)}{t(r_0\mu(1-t) + \lambda t(f(t)-1))} + \frac{1}{t} \right) dt \right\}.$$

Выразим $F_0(1) = C$. Тогда

$$F_0(z) = C \cdot \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma} \int_z^1 \left(\frac{(f(t)-1)(r_0 + r_2t)}{t(r_0\mu(1-t) + \lambda t(f(t)-1))} + \frac{1}{t} \right) dt \right\}.$$

Получим выражение для $F(z)$:

$$F(z) = F_0(z) + F_1(z) = C \cdot \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma} \int_z^1 \left(\frac{(f(t)-1)(r_0 + r_2t)}{t(r_0\mu(1-t) + \lambda t(f(t)-1))} + \frac{1}{t} \right) dt \right\} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\lambda(f(z)-1)}{r_0\mu(1-z) + \lambda z(f(z)-1)} \right).$$

Из условия нормировки $F(0) = 1$ найдем значение константы C :

$$1 = C \cdot \left(1 - \frac{\lambda f'(1)}{\lambda f'(1) - r_0\mu} \right);$$

где $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{k-1} q_k$, $f'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q_k = \bar{v}$ – среднее число заявок в пачке.

Получим

$$C = \frac{1}{1 - \frac{\lambda \bar{v}}{\lambda \bar{v} - r_0\mu}} = 1 - \frac{\lambda \bar{v}}{r_0\mu} = 1 - \rho;$$

где $\rho = \frac{\lambda \bar{v}}{r_0\mu}$ – характеристика загрузки системы.

Тогда

$$F(z) = (1 - \rho) \cdot \exp \left\{ \frac{\mu\lambda}{\sigma} \int_z^1 \left(\frac{(h(t) - 1)(r_0 + r_2 t)}{e^{jt}(r_0\mu(1 - e^{ju}) + \lambda t(h(t) - 1))} + \frac{\lambda}{t\sigma} \right) dt \right\} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\lambda(h(u) - 1)}{r_0\mu(1 - e^{ju}) + \lambda e^{ju}(h(u) - 1)} \right). \quad (6)$$

Получим из производящей функции значения вероятностей нахождения в системе i заявок:

$$P(0) = F(0);$$

$$P(1) = \frac{dF(0)}{dz};$$

$$P(2) = \frac{d^2 F(0)}{dz^2} \cdot \frac{1}{2!},$$

$$\dots$$

$$P(i) = \frac{d^i F(0)}{dz^i} \cdot \frac{1}{i!}.$$

2.2 Метод характеристической функции

Рассмотрим решение системы (1) с помощью характеристической функции. Введем характеристическую функцию $H_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(i)$, где i – число заявок в системе, j – мнимая единица, $h(u) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ku j} q_k$ – характеристическая функция для случайного числа заявок. Перепишем систему (2) в виде:

$$\begin{cases} -\lambda H_0(u) + r_0\mu H_1(u) + \sigma j \frac{dH_0(u)}{du} + \mu r_2 e^{ju} H_1(u) = 0, \\ \frac{\lambda}{e} h(u) H_0(u) + \lambda h(u) H_1(u) - (r_0\mu + r_2\mu + \lambda) H_1(u) - i\sigma e^{ju} \frac{dH_0(u)}{du} = 0; \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на e^{-ju} и сложив уравнения системы, получим:

$$\left(\frac{\lambda}{e^{ju}} h(u) - \lambda e^{-ju} \right) H_0(u) + \left(r_0\mu e^{-ju} - r_0\mu - \lambda + \lambda h(u) \right) H_1(u) = 0.$$

Откуда

$$H_1(u) = - \left(\frac{\lambda e^{-uj} (h(u) - 1)}{\mu r_0 (e^{-uj} - 1) + \lambda (h(u) - 1)} \right) H_0(u).$$

Подставим полученное равенство в первое уравнение системы и выразим $H_0(u)$:

$$\frac{dH_0(u)}{H_0(u)} = \left(\frac{\lambda}{\sigma j} + \frac{(r_0 \mu + r_2 \mu e^{ju})(\lambda e^{-ju} (h(u) - 1))}{\sigma j (r_0 \mu (e^{-ju} - 1) + \lambda (h(u) - 1))} \right) du;$$

$$H_0(u) = H_0(u) \cdot \exp \left\{ \int_0^u \left(\frac{\lambda}{\sigma j} + \frac{(r_0 \mu + r_2 \mu e^{jt})(\lambda e^{-jt} (h(t) - 1))}{\sigma j (r_0 \mu (e^{-jt} - 1) + \lambda (h(t) - 1))} \right) dt \right\}.$$

Выразим $H_0(0) = C$. Тогда

$$H_0(u) = C \cdot \exp \left\{ \int_0^u \left(\frac{\lambda}{\sigma j} + \frac{(r_0 \mu + r_2 \mu e^{jt})(\lambda e^{-jt} (h(t) - 1))}{\sigma j (r_0 \mu (e^{-jt} - 1) + \lambda (h(t) - 1))} \right) dt \right\}.$$

Получим выражение для $H(u)$:

$$H(u) = H_0(u) + H_1(u) = C \cdot \exp \left\{ \int_0^u \left(\frac{\lambda}{\sigma j} + \frac{(r_0 \mu + r_2 \mu e^{jt})(\lambda e^{-jt} (h(t) - 1))}{\sigma j (r_0 \mu (e^{-jt} - 1) + \lambda (h(t) - 1))} \right) dt \right\} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\lambda e^{uj} (h(u) - 1)}{\mu r_0 (e^{uj} - 1) + \lambda (h(u) - 1)} \right).$$

По условию нормировки $H(0) = 1$. Тогда

$$C = \frac{\lambda \bar{v} - r_0 \mu}{-\mu r_0} = 1 - \rho;$$

где $h'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} i \cdot k \cdot q_k = \bar{v}$ – среднее число заявок в пачке; $\rho = \frac{\lambda \bar{v}}{r_0 \mu}$ –

характеристика загрузки системы.

Тогда

$$H(u) = (1 - \rho) \cdot \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma j} \int_0^u \left(1 + \frac{(r_0 \mu + r_2 \mu e^{jt}) e^{-jt} (h(t) - 1)}{r_0 \mu (e^{-jt} - 1) + \lambda (h(t) - 1)} \right) dt \right\} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\lambda e^{-uj} (h(u) - 1)}{\mu r_0 (e^{-uj} - 1) + \lambda (h(u) - 1)} \right). \quad (7)$$

Значения вероятностей $P(i)$ найдем с помощью обратного преобразования Фурье:

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} H(u) du.$$

Заметим, что если в производящей функции (6) сделать замену $z = e^{ju}$, то получится характеристическая функция (7). Действительно,

$$\begin{aligned} F(e^{ju}) &= (1-\rho) \cdot \exp \left\{ \frac{\lambda}{\sigma j} \int_0^u \left(\frac{(h(x)-1)(r_0 + r_2 e^{jx})}{(r_0 \mu (1 - e^{jx}) + \lambda e^{jx} (h(x)-1))} + 1 \right) dx \right\} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\lambda(h(u)-1)}{r_0 \mu (1 - e^{ju}) + \lambda e^{ju} (h(u)-1)} \right). \\ F(z) &= (1-\rho) \cdot \exp \left\{ \frac{\mu \lambda}{\sigma} \int_z^1 \left(\frac{(h(t)-1)(r_0 + r_2 t)}{e^{jt} (r_0 \mu (1 - e^{jt}) + \lambda t (h(t)-1))} + \frac{\lambda}{t \sigma} \right) dt \right\} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\lambda(h(u)-1)}{r_0 \mu (1 - e^{ju}) + \lambda e^{ju} (h(u)-1)} \right). \end{aligned}$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} F(z) &= (1-\rho) \cdot \exp \left\{ \int_0^u \left(\frac{\lambda}{\sigma j} + \frac{(r_0 \mu + r_2 \mu e^{jt})(\lambda e^{-jt} (h(t)-1))}{\sigma j (r_0 \mu (e^{-jt} - 1) + \lambda (h(t)-1))} \right) dt \right\} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\lambda e^{-uj} (h(u)-1)}{\mu r_0 (e^{-uj} - 1) + \lambda (h(u)-1)} \right) = H(u). \end{aligned}$$

Рассмотрим систему со следующими параметрами:

$\lambda = 1, \mu = 7, r_0 = 0.5, r_2 = 0.2, \sigma = 1, z = 0, \bar{v} = 1.8$. Для нее существует стационарный режим, так как $\rho = \frac{\lambda \bar{v}}{r_0 \mu} = 0,92 < 1$. Тогда можно вычислить значения вероятностей

$$P(i)$$

$$P(0) = 0.755,$$

$$P(1) = 0.1027,$$

$$P(2) = 0.1115,$$

...

На рисунке 3 представлен график распределения вероятности числа заявок на орбите.

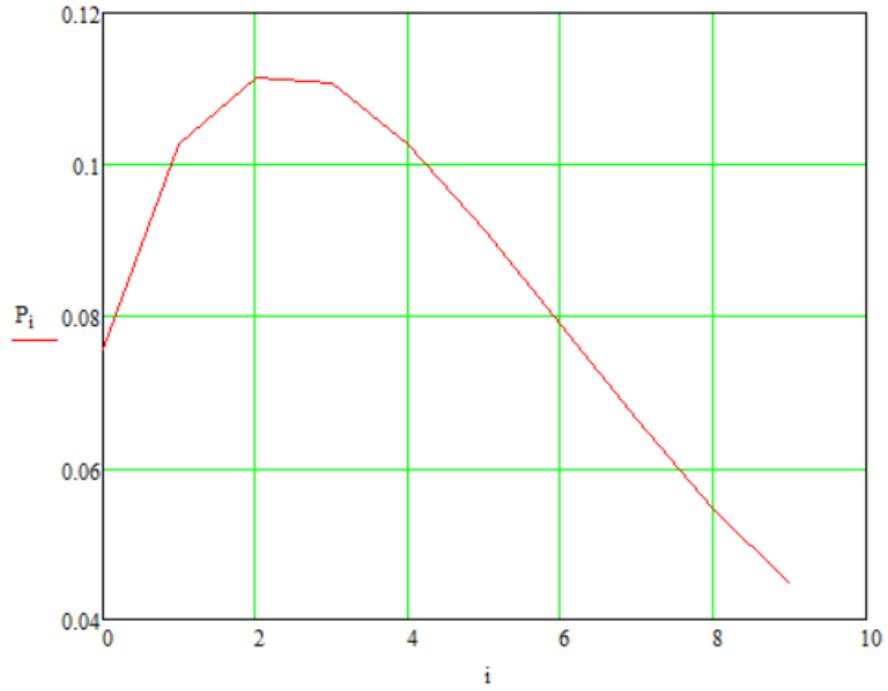


Рисунок 3. График вероятности числа заявок на орбите

3. Численные методы исследования RQ-систем

3.1 Матричный метод

Рассмотрим решение системы (2) матричным методом. Численный алгоритм нахождения стационарных вероятностей основан на сокращении размера системы; для этого представим систему (2) для $i = 0, 1, 2, \dots, N$ как

$$\mathbf{P}\mathbf{S} = \mathbf{B}, \quad (8)$$

где вектор-строка \mathbf{P} размерности $3(N+1)$ является искомым стационарным распределением вероятностей для каждого состояния устройства $n(t) = \{0, 1\}$.

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}(0) \mathbf{P}(1)),$$

и $\mathbf{P}(0), \mathbf{P}(1)$ – векторы-строки с элементами $P(0, i), P(1, i), i = 0, 1, 2, \dots, N$ соответственно. Матрица \mathbf{S} размерности $3(N+1) \times (3(N+1)+1)$ представлена в блочной форме как

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \end{pmatrix}.$$

Вид блоков $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ показан в таблицах 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4 соответственно.

Таблица 3.1. Матрица S_{11}

	i=0	i=1	i=2	...	i	...	i=N
$P_0(0)$	$-\lambda$	0	0	...	0	...	0
$P_0(1)$	0	$-\lambda - \sigma$	0	...	0	...	0
$P_0(2)$	0	0	$-\lambda - 2\sigma$...	0	...	0
...
$P_0(i)$	0	0	0	...	$-(\lambda + i\sigma)$...	0
...
$P_0(N)$	0	0	0	...	0	...	$-(\lambda + N\sigma)$

Таблица 3.2. Матрица S_{12}

	i=0	i=1	i=2	...	i=i	...	i=N
$P_0(0)$	λq_1	λq_2	λq_3	...	λq_{i+1}	...	λq_{N+1}
$P_0(1)$	σ	λq_1	λq_2	...	λq_i	...	λq_N
$P_0(2)$	0	2σ	λq_1	...	λq_{i-1}	...	λq_{N-1}
...
$P_0(i)$	0	0	0	...	λq_1	...	λq_{N+1-i}
...
$P_0(N)$	0	0	0	...	0	...	λq_1

Таблица 3.3. Матрица S_{21}

	i=0	i=1	i=2	...	i	...	i=N
$P_1(0)$	$r_0\mu$	$r_2\mu$	0	...	0	...	0
$P_1(1)$	0	$r_0\mu$	$r_2\mu$...	0	...	0
$P_1(2)$	0	0	$r_0\mu$...	0	...	0
...
$P_1(i)$	0	0	0	...	$r_0\mu$...	0
...
$P_1(N)$	0	0	0	...	0	...	$r_0\mu$

Таблица 3.4. Матрица S_{22}

	i=0	i=1	i=2	...	i	...	i=N
$P_1(0)$	$-(r_0\mu + r_2\mu + \lambda)$	λq_1	λq_2	...	λq_i	...	λq_N
$P_1(1)$	0	$-(r_0\mu + r_2\mu + \lambda)$	λq_1	...	λq_{i-1}	...	λq_{N-1}
$P_1(2)$	0	0	$-(r_0\mu + r_2\mu + \lambda)$...	λq_{i-2}	...	λq_{N-2}
...
$P_1(i)$	0	0	0	...	$-(r_0\mu + r_2\mu + \lambda)$...	λq_{N-i}
...
$P_1(N)$	0	0	0	...	0	...	$-(r_0\mu + r_2\mu + \lambda)$

Блоки S_{13}, S_{23} являются столбцами единичного вектора размерности $(N + 1)$. Вектор-строка $B = \|b_i\|$ в размерности $3(N + 1) + 1$ – это строка свободных коэффициентов с элементами $b_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots, N - 1), b_N = 1$. Найдем вектор P по формуле $P = B \cdot S^T \cdot (S \cdot S^T)^{-1}$. Алгоритм решения системы (3) реализуем с помощью математического пакета MathCad.

В таблице 3.5 приведено полученное распределение вероятностей для системы с параметрами $\lambda = 1, \mu = 7, \sigma = 1, r_0 = 0.5, r_2 = 0.2$.

Таблица 3.5. Полученное распределение вероятностей

	0	1	2	3	4	5
0	0.076	0.103	0.112	0.111	0.103	...

На рисунке 4 показано полученное распределение вероятностей.

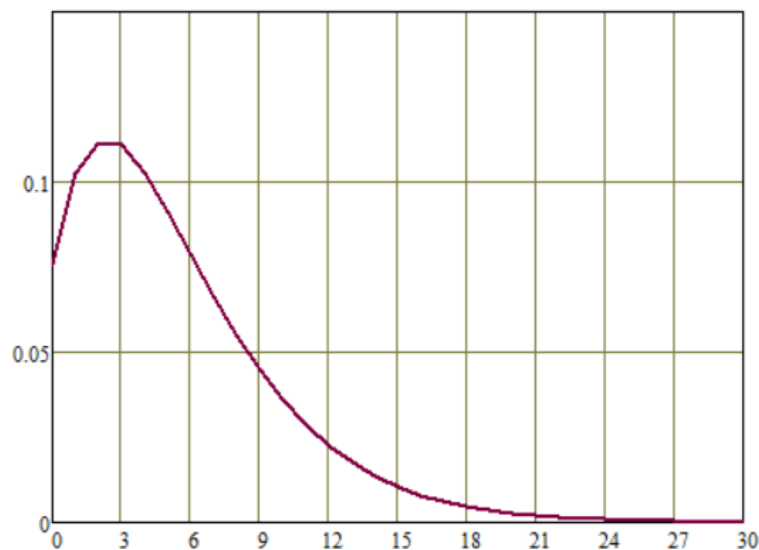


Рисунок 4. Распределение вероятностей числа заявок на орбите для системы $M^n|M|1$, полученное матричным методом

3.2 Исследование RQ-системы $M^n|M|1$ с использованием имитационной модели

Имитационное моделирование является одним из самым эффективных методов исследований систем различной сложности. Он позволяет проводить наблюдения за работой системы в течении необходимого периода времени, определять закономерности и показатели, характеризующие работу системы.

Полученная программа позволит моделировать поведение RQ-системы вида $M^n|M|1$ при разных значениях начальных параметров, а также проводить расчет характеристик системы (состояние обслуживающего прибора, зависимость числа заявок на орбите от времени, вероятность того, что в некоторый момент времени на орбите находится ровно i заявок). Код программы-генератора на языке Python представлен в Приложении Б.

При запуске программы происходит генерация случайного значения вероятности R . В зависимости от полученного значения вероятности R на вход системы поступают «пачки» заявок разной длины. Схема алгоритма формирования входящего потока заявок представлена в Приложении А (рис. 11).

Далее происходит проверка наличия заявок на орбите. В случае пустой орбиты если прибор свободен, то его занимает прибывшая заявка, для этой заявки генерируется время обслуживания и добавляется в массив ST . Если прибор занят, то сравниваются время завершения обслуживания текущей заявки и время прибытия новой заявки. Если новая заявка поступает на обслуживание до завершения обслуживания текущей заявки, то новая заявка поступает на орбиту, генерируется период ожидания и время повторного поступления заявки на обслуживание, которое добавляется в массив $orbit$. Если новая заявка поступает на обслуживание после завершения обслуживания текущей заявки, то генерируется случайное значение вероятности r . При $r \in [0, r_1)$ заявка покидает систему, при $r \in [r_1, r_1+r_2)$ заявка повторно поступает на обслуживание, для нее генерируется время обслуживания и добавляется в массив ST , при $r \in [r_1+r_2, r_1+r_2+r_3]$ заявка переходит на орбиту.

В случае, если орбита не пуста при свободном обслуживающем приборе, сравнивается время поступления на обслуживание новой заявки и время поступления заявки с орбиты. Если заявка с орбиты поступает на обслуживание быстрее, то она занимает прибор, в противном случае на обслуживание переходит прибывшая заявка, то его занимает прибывшая заявка, для поступившей на обслуживание заявки генерируется время обслуживания и добавляется в массив ST . Если прибор занят, то сравниваются время завершения

обслуживания текущей заявки, время прибытия новой заявки и время прибытия заявки с орбиты. Если из трех сравниваемых значений наименьшим является время прибытия заявки с орбиты, то заявка возвращается на орбиту, генерируется новый период ожидания и время повторного поступления заявки на обслуживание, которое добавляется в массив *orbit*. Быстрее всего прибывает на обслуживание новая заявка, то она переходит на орбиту, генерируется период ожидания и время повторного поступления заявки на обслуживание, которое добавляется в массив *orbit*. Если минимальным значением окажется время завершения обслуживания текущей заявки, то генерируется случайное значение вероятности r . При $r \in [0, r_1)$ заявка покидает систему, при $r \in [r_1, r_1+r_2)$ заявка повторно поступает на обслуживание, при $r \in [r_1+r_2, r_1+r_2+r_3]$ заявка переходит на орбиту.

Схема алгоритма работы программы представлена в Приложении А (рис. 12).

С помощью полученной модели найдем вероятность того, что в некоторый момент времени на орбите находится ровно i заявок (рис. 5). График состояния орбиты представлен на рисунке 6.

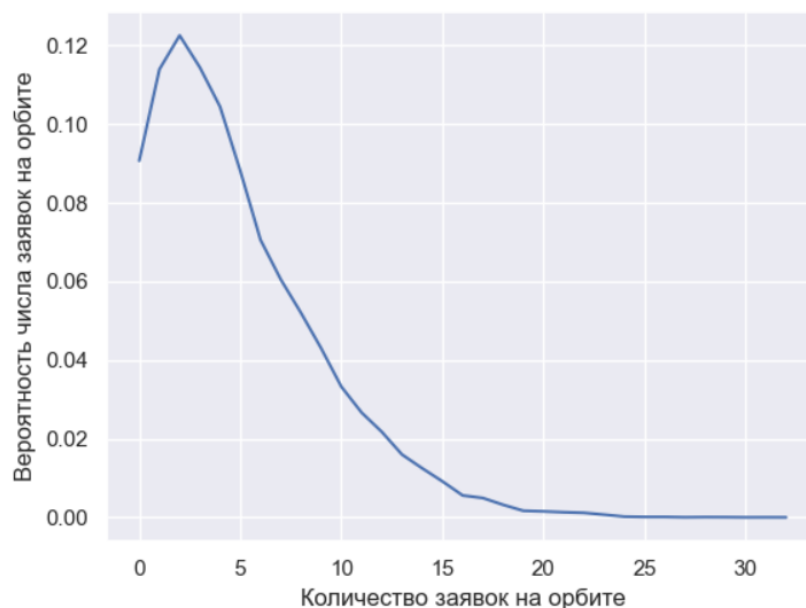


Рисунок 5. График распределения числа заявок на орбите для системы $M^n|M|1$

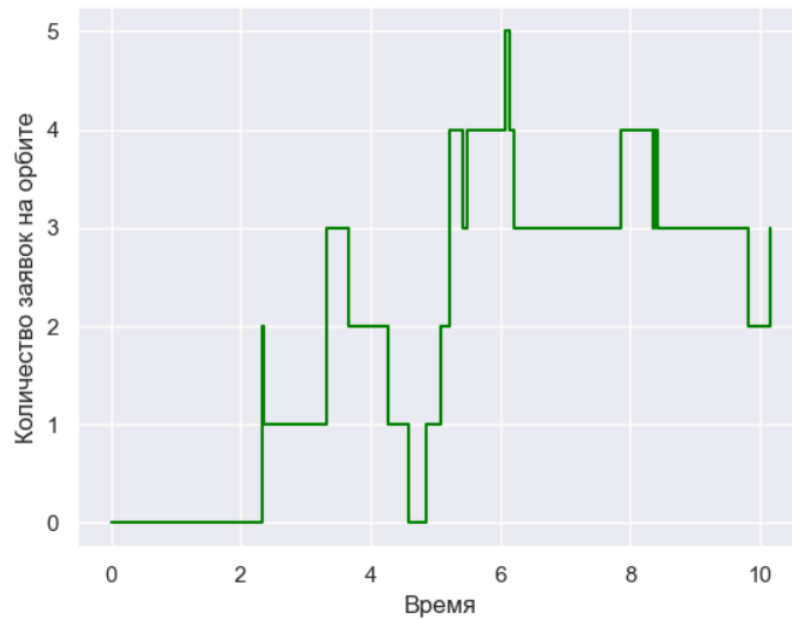


Рисунок 6. График состояния орбиты для системы $M^n|M|1$

3.3 Исследование RQ-системы $MMPP|M|1$ с использованием имитационной модели

Особенностью данной системы является цепь Маркова, управляющая интенсивностью входящего потока заявок. Схема алгоритма изменения интенсивности входящего потока заявок в зависимости от состояния управляющей цепи Маркова представлена в Приложении А (рис. 13).

С помощью полученной модели найдем вероятность того, что в некоторый момент времени на орбите находится ровно i заявок и сравним с результатами, полученными с помощью решения системы уравнений Колмогорова методом характеристической функции. Графики распределения вероятностей числа заявок на орбите и состояния орбиты, полученные в результате работы программы, представлены на рисунках 7 и 8.

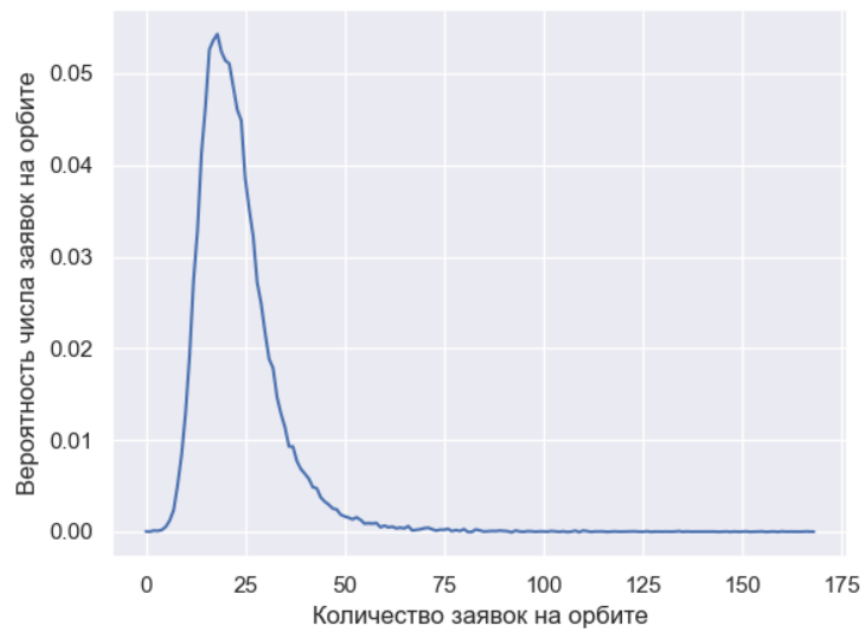


Рисунок 7. График распределения вероятностей числа заявок на орбите для системы MMPP|M|1

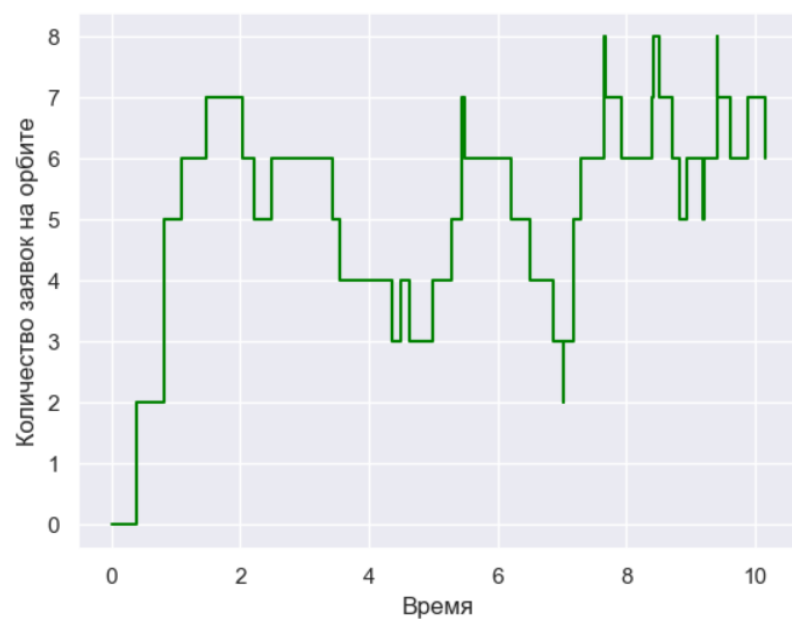


Рисунок 8. График состояния орбиты для системы MMPP|M|1

4. Асимптотический анализ

4.1 Исследование RQ-системы $M^n|M|1$

Получим решение системы (2) при условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$). Для этого воспользуемся методом асимптотического анализа. Сформулируем результаты в виде теорем.

Асимптотика первого порядка

Теорема 1. Пусть $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе $M^n|M|1$ с обратной связью. Тогда для последовательности характеристических функций выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{j\omega i(t)\sigma} = e^{j\omega k_1},$$

где

$$k_1 = \frac{\lambda(\bar{v}r_0\mu + \bar{v}r_2\mu - r_0\mu + \lambda\bar{v})}{r_0\mu - \lambda\bar{v}}, \quad \bar{v} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q_k.$$

Доказательство: введем характеристическую функцию

$$H_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(i), \quad \text{где } i - \text{число заявок в системе, } j - \text{мнимая единица,}$$

$$h(u) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ku j} q_k - \text{характеристическая функция для случайного числа заявок.}$$

Перепишем систему (2) в виде:

$$\begin{cases} -\lambda H_0(u) + r_0\mu H_1(u) + j\sigma \frac{dH_0(u)}{du} + \mu r_2 e^{ju} H_1(u) = 0, \\ \lambda e^{-ju} h(u) H_0(u) + \lambda h(u) H_1(u) - (r_0\mu + r_2\mu + \lambda) H_1(u) - j\sigma e^{ju} \frac{dH_0(u)}{du} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Сложив уравнения системы (9), получим:

$$(-\lambda + \lambda e^{-ju} h(u)) H_0(u) + (\mu r_2 e^{ju} + \lambda h(u) - \mu r_2 - \lambda) H_1(u) + j\sigma \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} (1 - e^{-ju}) = 0. \quad (10)$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon$ и сделаем в системе (9) замены:

$$u = \varepsilon w, \quad H_k(u) = F_k(w, \varepsilon), \quad k = \overline{0, 1}.$$

Получим:

$$\begin{cases} -\lambda F_0(w, \varepsilon) + r_0 \mu F_1(w, \varepsilon) + j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + \mu r_2 e^{j\varepsilon w} F_1(w, \varepsilon) = 0, \\ \lambda e^{-j\varepsilon w} f(w, \varepsilon) F_0(w, \varepsilon) + \lambda f(w, \varepsilon) F_1(w, \varepsilon) - (r_0 \mu + r_2 \mu + \lambda) F_1(w, \varepsilon) - j e^{j\varepsilon w} \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0. \end{cases}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} -\lambda F_0(w) + (r_0 \mu + r_2 \mu) F_1(w) + j \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} = 0, \\ \lambda F_0(w) - (r_0 \mu + r_2 \mu) F_1(w) - j \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} = 0. \end{cases}$$

Получены одинаковые уравнения. Сделаем замену $F_k(w) = R_k e^{jwk_1}, k = \overline{0,1}$ и введем дополнительное условие $R_0 + R_1 = 1$:

$$\lambda R_0 e^{jwk_1} - (r_0 \mu + r_2 \mu) R_1 e^{jwk_1} - j \frac{\partial (R_0 e^{jwk_1})}{\partial w} = 0,$$

$$\lambda R_0 e^{jwk_1} - (r_0 \mu + r_2 \mu) R_1 e^{jwk_1} + k_1 R_0 e^{jwk_1} = 0,$$

$$(k_1 + \lambda) R_0 - (r_0 \mu + r_2 \mu) R_1 = 0, \quad (11)$$

Выразим $R_0 = 1 - R_1$. Тогда

$$\lambda(1 - R_1) - (r_0 \mu + r_2 \mu) R_1 + k_1(1 - R_1) = 0.$$

Откуда:

$$R_0 = 1 - \frac{\lambda + k_1}{\lambda + r_0 \mu + r_2 \mu + k_1}, R_1 = \frac{\lambda + k_1}{\lambda + r_0 \mu + r_2 \mu + k_1}. \quad (12)$$

Выполним в уравнении (10) замены $\sigma = \varepsilon$, $u = \varepsilon w$, $H_k(u) = F_k(w, \varepsilon)$, $k = \overline{0,1}$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получим:

$$\lambda(\overline{v_1} - 1) F_0(w) + (r_2 \mu + \lambda \overline{v_1}) F_1(w) + j \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} = 0,$$

где $\overline{v_1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q_k$ – первый начальный момент (среднее число заявок в пачке).

Сделаем замену $F_k(w) = R_k e^{jwk_1}, k = \overline{0,1}$:

$$\lambda(\overline{v_1} - 1) R_0 + (r_2 \mu + \lambda \overline{v_1}) R_1 - k_1 R_0 = 0. \quad (13)$$

Подставив значения R_0 и R_1 , найдем значение k_1 :

$$k_1 = \frac{\lambda(\bar{v}r_0\mu + \bar{v}r_2\mu - r_0\mu + \lambda\bar{v})}{r_0\mu - \lambda\bar{v}}. \quad (14)$$

Асимптотика первого порядка определяет среднее значение числа поступивших заявок в системе, которое можно найти по формуле $M = \frac{k_1}{\sigma}$. Для более детального исследования системы следует рассмотреть асимптотику второго порядка.

Асимптотика второго порядка

Теорема 2. Пусть $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе $M^n|M|1$ с обратной связью. Тогда имеет место предельное равенство:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} E \left\{ \exp \left\{ jw\sqrt{\sigma} \left(i(t) - \frac{k_1}{\sigma} \right) \right\} \right\} = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} k_2 \right\},$$

где

$$k_2 = - \frac{(\lambda - \lambda\bar{v}_1 + k_1)f_0 + \left(\lambda\bar{v}_1 - \frac{\lambda\bar{v}_2 - \lambda - k_1}{2} \right) R_0 - (\lambda\bar{v}_1 + r_2\mu)f_1 - \left(\frac{r_2\mu + \lambda\bar{v}_2}{2} \right) R_1}{R_0},$$

$$\bar{v}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q_k, \quad \bar{v}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q_k.$$

Доказательство: в системе (9) сделаем замену

$H_k(u) = e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} H_k^{(2)}(u)$, $k = \overline{0,1}$. Получим:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} H_0^{(2)}(u) + r_0\mu \cdot e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} H_1^{(2)}(u) + j\sigma \left(e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + H_0^{(2)}(u) \frac{jk_1}{\sigma} e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} \right) + \\ + r_2\mu \cdot e^{ju} \cdot e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} H_1^{(2)}(u) = 0, \\ \lambda e^{-ju} h(u) \cdot e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} H_0^{(2)}(u) + \lambda h(u) \cdot e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} H_1^{(2)}(u) - (r_0\mu + r_2\mu + \lambda) \cdot e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} H_1^{(2)}(u) - \\ - j e^{ju} \sigma \left(e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + H_0^{(2)}(u) \frac{jk_1}{\sigma} e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} \right) = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену $\sigma = \varepsilon^2$. Тогда:

$$\begin{cases} -\lambda H_0^{(2)}(u) + r_0 \mu H_1^{(2)}(u) + j\varepsilon^2 \left(\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + H_0^{(2)}(u) \frac{jk_1}{\sigma} \right) + r_2 \mu \cdot e^{ju} H_1^{(2)}(u) = 0, \\ \lambda e^{-ju} h(u) H_0^{(2)}(u) + \lambda h(u) H_1^{(2)}(u) - (r_0 \mu + r_2 \mu + \lambda) H_1^{(2)}(u) - \\ - j e^{ju} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + H_0^{(2)}(u) \frac{jk_1}{\sigma} \right) = 0. \end{cases}$$

Обозначим $u = \varepsilon w$, $H_k^{(2)}(u) = \Phi_k^{(2)}(w, \varepsilon) \{R_k + jw\varepsilon f_k\}$:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot \Phi_2(w) \{R_0 + jw\varepsilon f_0\} + r_0 \mu \cdot \Phi_2(w) \{R_1 + jw\varepsilon f_1\} + j\varepsilon \cdot \Phi_2'(w) \{R_0 + jw\varepsilon f_0\} - \\ - \varepsilon^2 f_0 \cdot \Phi_2(w) - k_1 \cdot \Phi_2(w) \{R_0 + jw\varepsilon f_0\} + r_2 \mu e^{j\varepsilon w} \cdot \Phi_2(w) \{R_1 + jw\varepsilon f_1\} = 0, \\ \lambda e^{-j\varepsilon w} h(w, \varepsilon) \cdot \Phi_2(w) \{R_0 + jw\varepsilon f_0\} + \lambda h(w, \varepsilon) \cdot \Phi_2(w) \{R_1 + jw\varepsilon f_1\} - \\ - (r_0 \mu + r_2 \mu + \lambda) \cdot \Phi_2(w) \{R_1 + jw\varepsilon f_1\} - j e^{j\varepsilon w} \varepsilon \cdot \Phi_2'(w) \{R_0 + jw\varepsilon f_0\} + \varepsilon^2 f_0 e^{-j\varepsilon w} \Phi_2(w) + \\ + k_1 \cdot \Phi_2(w) \{R_0 + jw\varepsilon f_0\} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$-\lambda R_0 + r_0 \mu R_1 - k_1 R_0 + r_2 \mu R_1 = 0.$$

Исключим полученное равенство из первого уравнения системы (15):

$$-(\lambda + k_1) f_0 + (r_0 \mu + r_2 \mu) f_1 + r_2 \mu R_1 = -\frac{R_0}{w} \cdot \frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)}.$$

Обозначим $\frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)} = -wk_2$. Тогда $\Phi_2(w) = \exp\left(-\frac{w^2}{2} k_2\right)$ —

характеристическая функция нормальной случайной величины. Отсюда:

$$-(\lambda + k_1) f_0 + (r_0 \mu + r_2 \mu) f_1 = -r_2 \mu R_1 + k_2 R_0. \quad (16)$$

Решение уравнения будем искать в виде

$$f_k = C \cdot R_k + g_k + k_2 \cdot \Phi_k, k = \overline{0, 1}, \quad (17)$$

где g_0, g_1, Φ_0, Φ_1 — частные решения уравнения (16). Перейдем к рассмотрению системы:

$$\begin{cases} -(\lambda + k_1) g_0 + (r_0 \mu + r_2 \mu) g_1 = -r_2 \mu R_1, \\ -(\lambda + k_1) \Phi_0 + (r_0 \mu + r_2 \mu) \Phi_1 = R_0. \end{cases} \quad (18)$$

Наложим на g_0, g_1, f_0, f_1 ограничения:

$$\begin{cases} g_0 + g_1 = 0, \\ f_0 + f_1 = 0. \end{cases}$$

Продифференцируем уравнение (13) по k_1 :

$$R_0 + (k_1 + \lambda) \frac{\partial R_0}{\partial k_1} - \frac{\partial R_1}{\partial k_1} = 0.$$

Обозначим $\varphi_0 = \frac{\partial R_0}{\partial k_1}$, $\varphi_1 = \frac{\partial R_1}{\partial k_1}$. Получим:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{-R_0}{\lambda + k_1 + r_0\mu + r_2\mu}, \varphi_1 = \frac{R_0}{\lambda + k_1 + r_0\mu + r_2\mu}, g_0 = \frac{r_2\mu R_1}{\lambda + k_1 + r_0\mu + r_2\mu}, \\ g_1 &= \frac{-r_2\mu R_1}{\lambda + k_1 + r_0\mu + r_2\mu}. \end{aligned} \quad (14)$$

Выполним в уравнении (10) замены $H_k(u) = e^{ju\frac{k_1}{\sigma}} H_k^{(2)}(u)$, $k = \overline{0,1}$, $\sigma = \varepsilon^2$, $u = \varepsilon w$, $H_k^{(2)}(u) = \Phi_k^{(2)}(w, \varepsilon) \{R_k + jw\varepsilon f_k\}$.

$$\begin{aligned} &\left(j\lambda w \overline{v_1} - \frac{\lambda \varepsilon \overline{v_2} w^2}{2} - jw\lambda + \varepsilon \lambda \overline{v_1} w^2 + \frac{j\lambda \overline{v_2} \varepsilon^2 w^3}{2} - \frac{\lambda \varepsilon w^2}{2} - \frac{j\lambda \overline{v_1} \varepsilon^2 w^3}{2} + \frac{\lambda \varepsilon^2 w^4 \overline{v_2}}{4} - k_1 jw - \frac{k_1 \varepsilon w^2}{2} \right) \times \\ &\times \{R_0 + jw\varepsilon f_0\} + \left(\lambda jw \overline{v_1} + jwr_2\mu - \frac{r_2\mu \varepsilon w^2}{2} - \frac{\varepsilon \lambda \overline{v_2} w^2}{2} \right) \cdot \{R_1 + jw\varepsilon f_1\} - jwf_0 \varepsilon^2 - \frac{f_0 w^2 \varepsilon^3}{2} = \\ &= \left(\varepsilon w R_0 - \frac{jR_0 \varepsilon^2 w^2}{2} + jwf_0 \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^3 w^3}{2} \right) \frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)}, \end{aligned}$$

где $\overline{v_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q_k$ – второй начальный момент для числа заявок в пачке. При

$\varepsilon \rightarrow 0$ получим:

$$\lambda \overline{v_1} R_0 - \lambda R_0 + r_2\mu R_1 - k_1 R_0 + \lambda \overline{v_1} R_1 = 0.$$

Данное равенство совпадает с равенством (13), полученным в асимптотике первого порядка. Исключим полученное равенство из предыдущего и устремим ε к нулю:

$$\left(-\lambda \overline{v_1} + \lambda + k_1 \right) f_0 + \left(\lambda \overline{v_1} - \frac{\lambda \overline{v_2} - \lambda - k_1}{2} \right) R_0 - \left(\lambda \overline{v_1} + r_2\mu \right) f_1 - \left(\frac{r_2\mu + \lambda \overline{v_2}}{2} \right) R_1 = -k_2 R_0.$$

Откуда:

$$k_2 = - \frac{\left(\lambda - \lambda \overline{v_1} + k_1 \right) f_0 + \left(\lambda \overline{v_1} - \frac{\lambda \overline{v_2} - \lambda - k_1}{2} \right) R_0 - \left(\lambda \overline{v_1} + r_2\mu \right) f_1 - \left(\frac{r_2\mu + \lambda \overline{v_2}}{2} \right) R_1}{R_0}. \quad (15)$$

Подставляя (12) в (15) и учитывая (14) и (17) получим:

$$k_2 = \frac{\lambda r_0 \mu \left(2\lambda \bar{v}_1^2 + \mu \bar{v}_2 (r_0 + r_2) + \mu \bar{v}_2 (r_2 - r_0) \right)}{2 \left(r_0 \mu - \lambda \bar{v}_1 \right)^2}.$$

Асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа поступивших заявок в RQ-системе с несколькими типами вызываемых заявок является гауссовским с параметрами $\frac{k_1}{\sigma}$ и $\frac{k_2}{\sigma}$, что позволяет для предельного распределения $P(i)$ построить аппроксимацию, в частности аппроксимацию $P^{(2)}(i)$ вида

$$P^{(2)}(i) = (L(i + 0.5) - L(i - 0.5))(1 - L(-0.5))^{-1},$$

где $L(x)$ – функция нормального распределения с параметрами $\frac{k_1}{\sigma}$ и $\frac{k_2}{\sigma}$. На рисунке 9 представлен график аппроксимации для распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $M^n|M|1$.

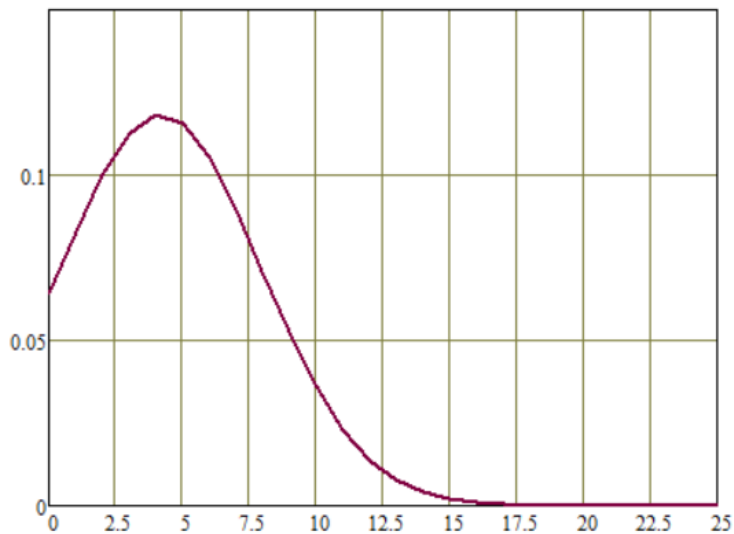


Рисунок 9. Аппроксимация для распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $M^n|M|1$

Точность аппроксимации

Сравним распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $M^n|M|1$, полученные с использованием асимптотического, матричного методов и имитационного моделирования. Для сравнения двух распределений вероятностей предлагается использовать расстояние Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leq i \leq N} \left| \sum_{v=0}^i (P^{(2)}(v) - P(v)) \right|,$$

которое показывает разницу между распределением которое показывает разницу между распределением $P(i)$ и $P^{(2)}(i)$, где $P(i)$ получено с использованием матричного метода, а аппроксимация $P^{(2)}(i)$ построена на основе гауссовской аппроксимации.

Положим $N = 300, \lambda = 1, \mu = 7, r_0 = 0.5, r_1 = 0.3, r_2 = 0.2$. Примем в качестве порогового значения $\Delta = 0.05$.

В таблице 4.1 приведены значения расстояния Колмогорова для асимптотического и матричного методов при заданном наборе параметров и различных значениях параметра σ и ρ .

Таблица 4.1. Расстояние Колмогорова

Δ	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$
$\rho = 0.5$	0.105	0.047	0.027	0.019
$\rho = 0.6$	0.106	0.046	0.032	0.022
$\rho = 0.7$	0.109	0.084	0.051	0.031

На основе полученных результатов можем заключить, что точность аппроксимации растет с уменьшением параметра σ и уменьшается с ростом загрузки системы.

4.2 Исследование RQ-системы MMPP|M|1

Получим решение системы (4) при условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$). Для этого воспользуемся методом асимптотического анализа. Сформулируем результаты в виде теорем.

Асимптотика первого порядка

Теорема 3. Пусть $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе ММРР|M|1 с обратной связью. Тогда для последовательности характеристических функций выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{j\omega i(t)\sigma} = e^{j\omega k_1},$$

где k_1 является решением уравнения

$$\mathbf{R} \left(\mathbf{I} + (\mathbf{\Lambda} + k_1 \mathbf{I}) ((r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right)^{-1} \cdot \left(-k_1 \mathbf{I} + (-k_1 \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}) ((r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) \cdot (\mathbf{\Lambda} + r_2 \mu \mathbf{I}) \mathbf{e} = 0,$$

вектор \mathbf{R} - стационарное распределение вероятностей процесса, определяемое из системы уравнений

$$\mathbf{RQ} = 0, \mathbf{Re} = 1.$$

Доказательство: введем характеристическую функцию

$$H_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(i), \text{ где } i - \text{число заявок в системе, } j - \text{мнимая единица.}$$

Перепишем систему (4) в виде:

$$\begin{cases} -\lambda_k H_0(u, k) + (r_0 \mu + r_2 \mu e^{ju}) H_1(u, k) + j\sigma \frac{\partial H_0(u, k)}{\partial u} + \sum_m q_{mk} H_0(u, m) = 0, \\ \lambda_k H_0(u, k) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u, k)}{\partial u} - (r_0 \mu + \lambda_k + r_2 \mu - \lambda_k e^{ju}) H_1(u, k) + \sum_m q_{mk} H_1(u, m) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Обозначим $\mathbf{H}_n(u) = \{H_n(u, 1), H_n(u, 2), \dots, H_n(u, K)\}$. В матричном виде система (16) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0(u) (-\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}) + (r_0 \mu + r_2 \mu e^{ju}) \mathbf{H}_1(u) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}_0(u)}{\partial u} = 0, \\ \mathbf{H}_0(u) \mathbf{\Lambda} + \mathbf{H}_1(u) \left((e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} - (r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I}_k + \mathbf{Q} \right) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0(u)}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Просуммировав уравнения системы (17) и умножив на единичный вектор столбец \mathbf{e} соответствующей размерности, получим:

$$j\sigma(1 - e^{-ju}) \frac{\partial \mathbf{H}_0(u)}{\partial u} \mathbf{e} + (e^{ju} - 1) \mathbf{H}_1(u) (r_2 \mu \cdot \mathbf{I}_k + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{e} = 0. \quad (18)$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon$, сделаем в системе (17) и в уравнении (18) замены:

$$u = \varepsilon w, \mathbf{H}_n(u) = \mathbf{F}_n(w, \varepsilon).$$

Получим:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)(-\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}) + (r_0\mu + r_2\mu e^{j\varepsilon w})\mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + j\frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \\ \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)\left((e^{j\varepsilon w} - 1)\mathbf{\Lambda} - (r_0\mu + r_2\mu)\mathbf{I}_k - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}\right) - je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

$$j(1 - e^{-j\varepsilon w})\frac{\partial \mathbf{F}_0(\varepsilon, w)}{\partial w}\mathbf{e} + (e^{j\varepsilon w} - 1)\mathbf{F}_1(\varepsilon, w)(r_2\mu \cdot \mathbf{I}_k + \mathbf{\Lambda})\mathbf{e} = 0. \quad (20)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ $\mathbf{F}_n(\varepsilon, w) \rightarrow \mathbf{F}_n(w)$, предельное значение $\mathbf{F}_n(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_n(w, \varepsilon)$

имеет вид $\mathbf{F}_n(w) = \mathbf{R}_k \cdot \Phi_n(w), k = \overline{0, 1}$. Система (19) и вспомогательное уравнение (20) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \Phi(w)\mathbf{R}_0(-\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}) + \Phi(w)\mathbf{R}_1(r_0\mu + r_2\mu) + j\frac{\partial(\Phi(w)\mathbf{R}_0)}{\partial w} = 0, \\ \Phi(w)\mathbf{R}_0\mathbf{\Lambda} + \Phi(w)\mathbf{R}_1(-(r_0\mu + r_2\mu)\mathbf{I}_k + \mathbf{Q}) - j\frac{\partial(\Phi(w)\mathbf{R}_0)}{\partial w} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$jR_0\Phi'(w)\mathbf{e} + \mathbf{R}_1\Phi(w)(r_2\mu \cdot \mathbf{I}_k + \mathbf{\Lambda})\mathbf{e} = 0. \quad (22)$$

Разделим систему (21) и уравнение (22) на $\Phi(w)$ и выполним замену $\Phi(w) = \exp(jwk_1)$:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0(-\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q} - k_1\mathbf{I}) + \mathbf{R}_1(r_0\mu + r_2\mu) = 0, \\ \mathbf{R}_0(\mathbf{\Lambda} + k_1\mathbf{I}) + \mathbf{R}_1(-(r_0\mu + r_2\mu)\mathbf{I}_k + \mathbf{Q}) = 0. \end{cases}$$

$$-k_1\mathbf{R}_0\mathbf{e} + \mathbf{R}_1(r_2\mu \cdot \mathbf{I}_k + \mathbf{\Lambda})\mathbf{e} = 0. \quad (23)$$

Запишем условие согласованности многомерных распределений для стационарного распределения состояний прибора

$$\sum_{k=0}^N \mathbf{R}_k = \mathbf{R} \quad (24)$$

где \mathbf{R} - вектор стационарного распределения вероятностей цепи Маркова, управляющей входящим потоком, который удовлетворяет системе уравнений

$$\mathbf{RQ} = 0, \mathbf{Re} = 1.$$

Из условия согласованности выразим \mathbf{R}_0 :

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \left(\mathbf{I} + (\mathbf{\Lambda} + k_1 \mathbf{I}) ((r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right)^{-1}.$$

Подставим полученное выражение во вспомогательное уравнение (23), учитывая (24), получим:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R} \left(\mathbf{I} + (\mathbf{\Lambda} + k_1 \mathbf{I}) ((r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right)^{-1} \cdot \left(-k_1 \mathbf{I} + (-k_1 \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}) ((r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right)^{-1} \times \\ & \times (\mathbf{\Lambda} + r_2 \mu \mathbf{I}) \mathbf{e} = 0. \end{aligned}$$

Асимптотика первого порядка позволяет найти среднее значение числа заявок на орбите в RQ-системе MMPP|M|1 в предельном условии большой задержки заявок на орбите в виде $M = \frac{k_1}{\sigma}$. Для более детального исследования процесса перейдем к асимптотике второго порядка.

Асимптотика второго порядка

Теорема 4. Пусть $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с обратной связью. Тогда для последовательности характеристических функций выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} E \left\{ \exp \left\{ jw \sqrt{\sigma} \left(i(t) - \frac{k_1}{\sigma} \right) \right\} \right\} = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} k_2 \right\},$$

где

$$k_2 = \frac{k_1 (\mathbf{y}_0 - \mathbf{R}_0) \mathbf{E} - \mathbf{y}_1 (\mathbf{\Lambda} + \mu r_2 \mathbf{I}) \mathbf{E}}{-k_1 \mathbf{g}_0 \mathbf{E} + \mathbf{g}_1 (\mathbf{\Lambda} + \mu r_2 \mathbf{I}) \mathbf{E} - \mathbf{R}_0 \mathbf{E}},$$

а векторы $\mathbf{g}_k, \mathbf{y}_k$ определяются из систем уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= -\mathbf{R}_0 \cdot \left((\mu r_0 + \mu r_2 + k_1) \mathbf{I} - \mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda} \right)^{-1}, \quad \mathbf{g}_1 = (\mu r_0 + \mu r_2)^{-1} \cdot \left(\mathbf{R}_0 - \mathbf{g}_0 \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - k_1 \mathbf{I}) \right), \\ \mathbf{y}_0 &= \left(\frac{\mu r_0 \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}}{\mu r_0 + \mu r_2} - \mu r_2 \mathbf{R}_1 + k_1 \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda} \right) \cdot (\mu r_0 + \mu r_2) \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \left(-\mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda} + (k_1 + \mu r_0 + \mu r_2) \mathbf{I} \right)^{-1}, \\ \mathbf{y}_1 &= \frac{1}{\mu r_0 + \mu r_2} \cdot \left(-\mu r_0 \mathbf{R}_1 - \mathbf{y}_0 (\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - k_2 \mathbf{I}) \right). \end{aligned}$$

Доказательство: в системе (17) и вспомогательном уравнении (18) сделаем замену $\mathbf{H}_k(u) = \exp\left(ju \frac{k_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_k^{(2)}(u)$, $k = \overline{0,1}$. Получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp\left(ju \frac{k_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_0^{(2)}(u)(-\Lambda + \mathbf{Q}) + \exp\left(ju \frac{k_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_1^{(2)}(u)(r_0\mu + r_2\mu e^{ju}) + \\ + j\sigma \frac{\partial \left(\exp\left(ju \frac{k_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_0^{(2)}(u) \right)}{\partial u} = 0, \\ \exp\left(ju \frac{k_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_0^{(2)}(u)\Lambda + \exp\left(ju \frac{k_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_1^{(2)}(u)\left((e^{ju} - 1)\Lambda - (r_0\mu + r_2\mu)\mathbf{I}_k + \mathbf{Q}\right) - \\ - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \left(\exp\left(ju \frac{k_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_0^{(2)}(u) \right)}{\partial u} = 0. \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & j\sigma(1 - e^{-ju}) \frac{\partial \left(\exp\left(ju \frac{k_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_0^{(2)}(u) \right)}{\partial u} \mathbf{e} + (e^{ju} - 1) \exp\left(ju \frac{k_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_1^{(2)}(u) \times \\ & \times (r_2\mu \cdot \mathbf{I}_k + \Lambda) \mathbf{e} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$, сделаем в системе (25) и в уравнении (26) замены $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}_k^{(2)}(u) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon)$, $k = \overline{0,1}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)(-\Lambda + \mathbf{Q} - k_1\mathbf{I}) + \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon)(r_0\mu + r_2\mu e^{jw\varepsilon}) + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \\ \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)\Lambda + \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon)\left((e^{jw\varepsilon} - 1)\Lambda - (r_0\mu + r_2\mu)\mathbf{I}_k + \mathbf{Q}\right) - j\varepsilon e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0. \end{array} \right.$$

$$(1 - e^{-jw\varepsilon}) \left(-k_1 \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} \right) \mathbf{e} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon) (r_2\mu \cdot \mathbf{I}_k + \Lambda) \mathbf{e} = 0. \quad (27)$$

Выполним замену $\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi(w) \{ \mathbf{R}_k + jw\varepsilon \mathbf{f}_k \}$, $k = \overline{0,1}$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ получим:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_0(-\Lambda + \mathbf{Q} - k_1 \mathbf{I}) + r_2 \mu \mathbf{R}_1 + \mathbf{f}_1(r_0 \mu + r_2 \mu) = -\mathbf{R}_0 \frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)w}, \\ \mathbf{f}_0(\Lambda + k_1) + \mathbf{f}_1(-(r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I} + \mathbf{Q}) - \mathbf{R}_0 k_1 = \mathbf{R}_0 \frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)w}. \end{cases}$$

$$-k_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)w} \mathbf{R}_0 \mathbf{e} + \mathbf{f}_1(r_2 \mu \cdot \mathbf{I}_k + \Lambda) \mathbf{e} = 0.$$

Так как отношение $\frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)w}$ не зависит от w , запишем функцию $\Phi_2(w)$ в виде

$$\Phi_2(w) = \exp\left(\frac{(jw)^2}{2} k_2\right).$$

Тогда $\frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)w} = -k_2$. Получим:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_0(-\Lambda + \mathbf{Q} - k_1 \mathbf{I}) + r_2 \mu \mathbf{R}_1 + \mathbf{f}_1(r_0 \mu + r_2 \mu) = k_2 \mathbf{R}_0, \\ \mathbf{f}_0(\Lambda + k_1) + \mathbf{f}_1(-(r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I} + \mathbf{Q}) - \mathbf{R}_0 k_1 = -k_2 \mathbf{R}_0. \end{cases} \quad (28)$$

$$-k_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} - k_2 \mathbf{R}_0 \mathbf{e} + \mathbf{f}_1(r_2 \mu \cdot \mathbf{I}_k + \Lambda) \mathbf{e} = 0. \quad (29)$$

Решение уравнения будем искать в виде $f_k = C \cdot \mathbf{R}_k + k_2 \cdot \mathbf{g}_k + \mathbf{y}_k, k = \overline{0,1}$.

Подставим разложение в систему уравнений (28) и уравнение (29):

$$\begin{cases} (C \cdot \mathbf{R}_0 + k_2 \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0)(-\Lambda + \mathbf{Q} - k_1 \mathbf{I}) + r_2 \mu \mathbf{R}_1 + (C \cdot \mathbf{R}_1 + k_2 \cdot \mathbf{g}_1 + \mathbf{y}_1)(r_0 \mu + r_2 \mu) = k_2 \mathbf{R}_0, \\ (C \cdot \mathbf{R}_0 + k_2 \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0)(\Lambda + k_1) + (C \cdot \mathbf{R}_1 + k_2 \cdot \mathbf{g}_1 + \mathbf{y}_1)(-(r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I} + \mathbf{Q}) - \mathbf{R}_0 k_1 = -k_2 \mathbf{R}_0, \\ -k_1 (C \cdot \mathbf{R}_0 + k_2 \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0) \mathbf{e} - k_2 \mathbf{R}_0 \mathbf{e} + (C \cdot \mathbf{R}_1 + k_2 \cdot \mathbf{g}_1 + \mathbf{y}_1)(r_2 \mu \cdot \mathbf{I}_k + \Lambda) \mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Слагаемые, содержащие константу C , уничтожаются. Объединим коэффициенты при различных степенях k_2 в две системы уравнений:

$$k_2^{-1} : \begin{cases} \mathbf{g}_0(-\Lambda + \mathbf{Q} - k_1 \mathbf{I}) + \mathbf{g}_1(r_0 \mu + r_2 \mu) = \mathbf{R}_0, \\ \mathbf{g}_0(\Lambda + k_1) + \mathbf{g}_1(-(r_0 \mu + r_2 \mu) \mathbf{I} + \mathbf{Q}) = -\mathbf{R}_0. \end{cases} \quad (31)$$

$$k_2^0 : \begin{cases} \mathbf{y}_0(-\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q} - k_1\mathbf{I}) + \mathbf{y}_1(r_0\mu + r_2\mu) + \mathbf{R}_1r_2\mu = 0, \\ \mathbf{y}_0(\mathbf{\Lambda} + k_1) + \mathbf{y}_1(-(r_0\mu + r_2\mu)\mathbf{I} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda} - \mathbf{R}_0k_1 = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Из систем уравнений (31) и (32) выразим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= -\mathbf{R}_0 \cdot ((\mu r_0 + \mu r_2 + k_1)\mathbf{I} - \mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda})^{-1}; \\ \mathbf{g}_1 &= (\mu r_0 + \mu r_2)^{-1} \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{g}_0 \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - k_1\mathbf{I})); \\ \mathbf{y}_0 &= \left(\frac{\mu r_0 \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}}{\mu r_0 + \mu r_2} - \mu r_2 \mathbf{R}_1 + k_1 \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda} \right) \cdot (\mu r_0 + \mu r_2) \cdot \mathbf{Q}^{-1} \times \\ &\times (-\mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda} + (k_1 + \mu r_0 + \mu r_2)\mathbf{I})^{-1} \\ \mathbf{y}_1 &= \frac{1}{\mu r_0 + \mu r_2} \cdot (-\mu r_0 \mathbf{R}_1 - \mathbf{y}_0(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - k_2\mathbf{I})) \end{aligned}$$

Приводя подобные в уравнении (30), получим k_2 в явном виде:

$$k_2 = \frac{k_1(\mathbf{y}_0 - \mathbf{R}_0)\mathbf{E} - \mathbf{y}_1(\mathbf{\Lambda} + \mu r_2\mathbf{I})\mathbf{E}}{-k_1\mathbf{g}_0\mathbf{E} + \mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda} + \mu r_2\mathbf{I})\mathbf{E} - \mathbf{R}_0\mathbf{E}}$$

Предельное распределение вероятностей числа заявок на орбите в исследуемой системе является гауссовским с математическим ожиданием $\frac{k_1}{\sigma}$ и дисперсией $\frac{k_2}{\sigma}$. Чтобы перейти от непрерывного распределения вероятностей к дискретному, воспользуемся соотношением

$$P^{(2)}(i) = (L(i + 0,5) - L(i - 0,5))(1 - L(-0,5))^{-1},$$

где $L(x)$ – функция распределения гауссовской случайной величины с параметрами $\frac{k_1}{\sigma}$ и $\frac{k_2}{\sigma}$. На рисунке 10 представлен график аппроксимации для распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе ММРР|М|1.

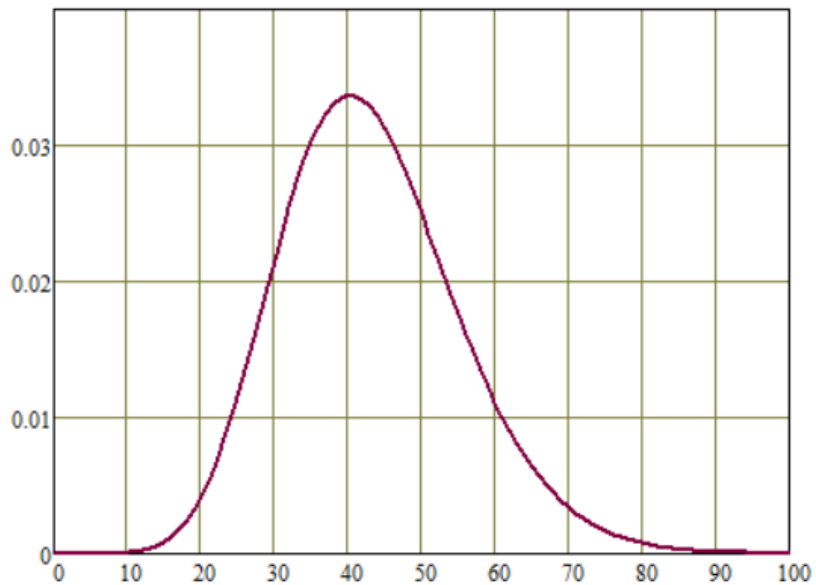


Рисунок 10. Асимптотическое распределение вероятностей числа поступивших заявок в RQ-системе с несколькими типами вызываемых заявок для системы MMPP|M|1

Точность аппроксимации

Сравним распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе MMPP|M|1, полученные с использованием асимптотического метода и имитационного моделирования. Для сравнения двух распределений вероятностей предлагается использовать расстояние Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leq n \leq \infty} \left| \sum_{i=0}^n (P(i) - P^{(2)}(i)) \right|,$$

где $P(i)$ – распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученное с использованием имитационного моделирования, а $P^{(2)}(i)$ – аппроксимация того же распределения вероятностей, построенная на основе полученных асимптотических характеристик системы.

Зададим параметры системы $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mu = 5$, $r_0 = 0.8$, $r_2 = 0.1$. Введем

также параметр загрузки системы $\rho = \frac{\Lambda \bar{Q} \bar{E}}{\mu r_0}$. Примем в качестве порогового

значения $\Delta = 0.05$.

Таблица 4.2. Расстояние Колмогорова

Δ	$\sigma=1$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.1$	$\sigma=0.05$
$\rho=0.5$	0.068	0.049	0.032	0.014
$\rho=0.6$	0.079	0.058	0.039	0.018
$\rho=0.7$	0.099	0.079	0.041	0.027

Из данных, представленных в таблице 4.2, можем заключить, что точность аппроксимации растет с уменьшением параметра σ и уменьшается с ростом загрузки системы.

5. Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение

В работе осуществляется исследование RQ-системы с модулированным пуассоновским входящим потоком и обратной связью. Целью данного раздела является экономическое обоснование данной научной разработки, а также определение и расчет трудовых и денежных затрат на её создание.

5.1 Организация и планирование работ

Для успешной организации процесса работы над конкретной задачей необходимо рационально спланировать занятость каждого из участников и сроки проведения отдельных этапов работы.

На данном этапе составляется полный список необходимых работ, назначаются их исполнители и продолжительность. Результатом планирования работ является линейный график реализации проекта.

Перечень этапов настоящей работы и продолжительность их выполнения в процентном соотношении для научного руководителя (НР) и исполнителя (И) представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1. Распределение занятости научного руководителя и исполнителя по этапам работы

Основные этапы	№	Содержание работ	Исполнитель
Разработка технического задания	1	Постановка целей и задач	Руководитель
	2	Составление и утверждение ТЗ (структура исследования, схемы модели)	Руководитель
Выбор направления исследований	3	Подбор и изучение материалов по теме	Инженер
	4	Календарное планирование работ	Руководитель
Теоретические исследования	5	Выбор методов исследования	Руководитель
	6	Проведение исследования	Инженер
	7	Разработка вариантов моделирования	Инженер
	8	Выбор ПО для расчетов и моделирования	Инженер
	9	Реализация имитационной модели	Инженер
Обобщение и оценка результатов	10	Оценка адекватности полученной модели	Руководитель
	11	Оценка надежности полученных результатов	Руководитель
Оформление отчёта по НИР	12	Составление пояснительной записки по проекту	Инженер

5.1.1 Продолжительность этапов работ

Для определения ожидаемой продолжительности работ $t_{ож}$ с помощью экспертных оценок были использованы следующие формулы:

$$t_{ож} = \frac{3t_{min} + 2t_{max}}{5} \quad (1)$$

где:

t_{min} – минимальная продолжительность работы, дн.;

t_{max} – максимальная продолжительность работы, дн.

Длительность этапов в рабочих днях $T_{РД}$ вычислялась по формуле:

$$T_{РД} = t_{ож} * K_{Д} \quad (2)$$

где:

$K_{Д}$ – коэффициент, учитывающий дополнительное время на компенсации и согласование работ ($K_{Д} = 1,2$).

Расчет продолжительности этапа в календарных днях $T_{КД}$ ведется по формуле:

$$T_{КД} = T_{РД} * T_{К} \quad (3)$$

где:

$T_{РД}$ – продолжительность выполнения этапа в рабочих днях;

$T_{К}$ – коэффициент календарности.

Коэффициент календарности рассчитывается по формуле:

$$T_{К} = \frac{T_{КАЛ}}{T_{КАЛ} - T_{ВД} - T_{ПД}} \quad (4)$$

где:

$T_{КАЛ}$ – календарные дни ($T_{КАЛ} = 365$);

$T_{ВД}$ – выходные дни ($T_{ВД} = 53$);

$T_{ПД}$ – праздничные дни ($T_{ПД} = 16$).

Все расчеты по трудозатратам представлены в таблице 5.2. В ней итоги продолжительности этапов работы в рабочих и календарных днях являются общими трудоемкостями для каждого из участников проекта. Результаты, представленные в таблицы, будут использоваться для дальнейших расчетов.

Величины трудоемкости этапов по исполнителям $T_{\text{КД}}$ позволяют построить линейный график осуществления проекта, приведенный в таблице 5.3.

Таблица 5.2 Трудозатраты на выполнение проекта

Этапы работы	Продолжительность работ, дни			Длительность работ, чел/дн.	
	t_{\min}	t_{\max}	$t_{\text{ож}}$	$T_{\text{рд}}$	$T_{\text{кд}}$
Постановка целей и задач	1	2	1,4	1,68	2,07
Составление и утверждение ТЗ (структура исследования, тип модели)	2	6	3,6	4,32	5,31
Подбор и изучение материалов по теме	20	25	22	26,4	32,47
Календарное планирование работ	2	3	2,4	2,88	3,54
Выбор методов исследования	3	7	4,6	5,52	6,79
Проведение исследования	25	40	31	37,2	45,76
Разработка вариантов моделирования	2	4	2,8	3,36	4,13
Выбор ПО для расчетов и моделирования	2	3	1,4	1,68	2,07
Реализация имитационной модели	7	15	10,2	12,24	15,05
Оценка адекватности полученной модели	2	4	2,8	3,36	4,13
Оценка надежности полученных результатов	2	4	2,8	3,36	4,13
Составление пояснительной записки по проекту	10	15	12	14,4	17,71
Итого:			98	116,4	143,16

Таблица 5.3. Линейный график осуществления проекта

№	Вид работы	Исполнители	Тк (кал. дн.)	Продолжительность выполнения работ										
				Январь		Февраль			Апрель			Май		
				2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	Постановка целей и задач	Руководитель	2,07	■										
2	Составление и утверждение ТЗ	Руководитель	5,31	■	■									
3	Подбор и изучение материалов по теме	Инженер	32,47		■	■	■							
4	Календарное планирование работ	Руководитель	3,54			■								
5	Выбор методов исследования	Руководитель	6,79				■	■						
6	Проведение исследования	Инженер	45,76				■	■	■	■				
7	Разработка вариантов моделирования	Инженер	4,13							■				
8	Выбор ПО для расчетов и моделирования	Инженер	2,07								■			
9	Реализация имитационной модели	Инженер	15,05								■	■		
10	Оценка адекватности полученной модели	Руководитель	4,13									■		
11	Оценка надежности полученных результатов	Руководитель	4,13										■	
12	Составление пояснительной записки по проекту	Инженер	17,71										■	■

5.2 Расчет сметы затрат на выполнение проекта

В состав затрат на создание проекта включается величина всех расходов, необходимых для реализации комплекса работ, составляющих содержание исследования. Расчет сметной стоимости выполнения производится по следующим статьям затрат:

- материалы и покупные изделия;
- заработная плата;
- социальный налог;
- расходы на электроэнергию (без освещения);
- амортизационные отчисления;
- командировочные расходы;
- оплата услуг связи;
- арендная плата за пользование имуществом;
- прочие услуги (сторонних организаций);
- прочие (накладные расходы) расходы.

5.2.1 Расчет затрат на материалы

В материальных затратах будут учтены только расходы на канцелярские принадлежности и картриджи для принтера, так как все необходимые для работы над проектом материалы имелись в распоряжении кафедры, на которой велась разработка. Материалы, необходимые для выполнения данной работы, и расчет материальных затрат представлены в таблице 5.4.

Таблица 5.4. Расчет затрат на материалы

Наименование материалов	Цена за ед., руб.	Кол-во	Сумма, руб.
Бумага для принтера формата А4	230	1 уп.	230
Ручка шариковая	30	2 шт.	60
Картридж для принтера	1400	1 шт.	1400
Тетрадь в клетку формата А4 96 л.	400	1 шт.	400
Итого:			2090

Пусть транспортно-заготовительные расходы (ТРЗ) составляют 10 % от отпускной цены материалов, тогда расходы на материалы с учетом ТРЗ равны $C_{\text{мат}} = 2090 * 1,1 = 2299$ руб.

5.2.1 Расчет заработной платы

Расчет основной заработной платы выполняется на основе трудоемкости выполнения каждого этапа и величины месячного оклада исполнителя. Месячный оклад научного руководителя, занимающего должность доцента и имеющего степень кандидата технических наук, составляет 33664 руб./мес. Месячный оклад исполнителя, являющегося инженером-исследователем, составляет 9489 руб./мес.

Исходя из того, что в месяце в среднем 25,083 рабочих дня при пятидневной рабочей неделе среднедневная тарифная заработная плата (ЗП_{дн-т}) рассчитывается по формуле:

$$ЗП_{дн-т} = MO/25,083 \quad (5)$$

учитывающей, что в году 301 рабочий день и, следовательно, в месяце в среднем 25,083 рабочих дня (при шестидневной рабочей неделе).

Для учета в составе таблицы 5.5 премий, дополнительной зарплаты и районной надбавки используется следующий ряд коэффициентов: $K_{пр} = 1,1$; $K_{доп.ЗП} = 1,118$; $K_p = 1,3$. Таким образом, для перехода от тарифной суммы заработка исполнителя, связанной с участием в проекте, к соответствующему полному заработку необходимо первую умножить на интегральный коэффициент $K_{и} = 1,1 * 1,118 * 1,3 = 1,699$. Для пятидневной недели – 1,62.

Таблица 5.5. Затраты на заработную плату

Исполнитель	Оклад, руб./мес.	Среднедневная ставка, руб./раб.день	Затраты времени, раб.дни	Коэффициент	Фонд з/платы, руб.
НР	33 664	1342,1	38	1,699	85188,67
И	9489	378,3	115	1,62	70477,29
Итого:					155665,96

5.2.2 Расчет затрат на социальный налог

Затраты на единый социальный налог (ЕСН), включающий в себя отчисления в пенсионный фонд, на социальное и медицинское страхование, составляют 30% от полной заработной платы по проекту, т.е.

$$C_{соц} = C_{зп} * 0,3 = 155665,96 * 0,3 = 46699,79 \text{ руб.}$$

5.2.3 Расчет затрат на электроэнергию

Данный вид расходов включает в себя затраты на электроэнергию при работе оборудования (компьютера и принтера). Затраты на электроэнергию при работе оборудования $C_{эл.об.}$ рассчитываются по формуле:

$$C_{эл.об.} = P_{об} * Ц_э * t_{об} \quad (6)$$

где:

$P_{об}$ – мощность, потребляемая оборудованием, кВт;

$Ц_э$ – тарифная цена за 1 кВт·час;

$t_{об}$ – время работы оборудования, час.

Мощность $P_{об}$, потребляемая оборудованием, определяется по формуле:

$$P_{об} = P_{ном.} * K_C \quad (7)$$

где:

$P_{ном.}$ – номинальная мощность оборудования, кВт;

K_C – коэффициент загрузки (для технологического оборудования малой мощности $K_C = 1$).

Номинальная мощность персонального компьютера составляет 0,3 кВт, принтера – 0,1 кВт. Для ТПУ с учетом налога на добавленную стоимость (НДС) $Ц_э = 6,59$ руб./кВт·час.

Время работы оборудования $t_{об}$ для исполнителя вычисляется на основе данных таблицы трудозатрат:

$$t_{об} = T_{РД} * K_t \quad (8)$$

где:

$K_t \leq 1$ – коэффициент использования оборудования по времени, равный отношению времени его работы в процессе выполнения проекта к ТРД.

Из расчета, что продолжительность рабочего дня равна 8 часов, а работа выполнялась 135 рабочих дней, получим, что общее время выполнения проекта составляет 1080 часов.

Так как работа на компьютере проводилась по 7 часов в день из 8, то $K_t = 0,88$. Тогда из 1080 часов, потраченных исполнителем на осуществление проекта, 950 часов были проведены за компьютером. Принтер использовался примерно в

течении 10 часов. Затраты на электроэнергию при работе оборудования сведены в таблицу 5.6.

Таблица 5.6. Затраты на электроэнергию технологических целей

Наименование оборудования	Время работы оборудования $t_{об}$, час	Потребляемая мощность $P_{об}$, кВт	Затраты $Э_{об}$, руб.
Персональный компьютер	950	0,3	1601,37
Лазерный принтер	10	0,1	6,59
Итого:			1607,96

5.2.4 Расчет амортизационных расходов

В статье «Амортизационные отчисления» рассчитывается амортизация используемого оборудования за время выполнения проекта.

Амортизационные отчисления рассчитываются по времени использования компьютера по формуле:

$$C_{ам} = N_A * C_{об} * t_{рф} * n / F_d \quad (9)$$

где:

N_A – годовая норма амортизации;

$C_{об}$ – цена оборудования;

F_d – действительный годовой фонд рабочего времени;

$t_{рф}$ – время работы вычислительной техники;

n – число задействованных единиц оборудования, $n = 1$.

Годовая амортизация N_A определяется как величина, обратная сроку амортизации оборудования C_A . Срок амортизации оборудования определяется согласно постановлению правительства РФ «О классификации основных средств, включенных в амортизационные группы». Для компьютера примем $C_A = 3$ года, тогда $N_A = 0,33$. Для принтера примем $C_A = 2$ года, тогда $N_A = 0,5$. F_d – действительный годовой фонд времени работы соответствующего оборудования, берется из специальных справочников или фактического режима его использования в текущем календарном году. $F_d = 303 * 8 = 2424$ часа;

Расчет затрат на амортизационные отчисления представлен в таблице 5.7.

Таблица 5.7. Затраты на амортизационные отчисления

Наименование оборудования	Норма амортизации оборудования N_A	Стоимость оборудования $C_{об}$, руб.	Фактич. время работы оборудования $t_{рф}$, ч.	Действ. годовой фонд раб. Времени F_d , ч.	Амортизац. отчисления $C_{ам}$, руб.
Персональный компьютер	0,33	50000	810	2424	5012,37
Лазерный принтер	0,5	8000	10	2424	16,5
Итого:					5028,87

5.2.5 Расчет прочих расходов

В статье «Прочие расходы» отражены расходы на выполнение проекта, которые не учтены в предыдущих статьях, их следует принять равными 10% от суммы всех предыдущих расходов, т.е.

$$C_{\text{проч}} = 0,1 * (C_{\text{мат}} + C_{\text{зп}} + C_{\text{соц}} + C_{\text{эл.об.}} + C_{\text{ам}}) \quad (10)$$

$$C_{\text{проч}} = 0,1 * (1990 + 155665,96 + 46699,79 + 1607,96 + 5028,87) = 21130,16.$$

Таким образом, накладные расходы составили 21130,16 руб.

5.2.6 Расчет общей себестоимости исследования

Общая стоимость проведения исследования определяется путем суммирования затрат по всем статьям и представлена в таблице 5.8. Расчеты расходов, учитываемых непосредственно на основе платежных документов отсутствуют.

Таблица 5.8. Смета затрат на разработку проекта

Статья затрат	Условное обозначение	Сумма, руб.
Материалы и покупные изделия	$C_{\text{мат}}$	2299
Основная заработная плата	$C_{\text{зп}}$	155665,96
Отчисления в социальные фонды	$C_{\text{соц}}$	46699,79
Расходы на электроэнергию	$C_{\text{эл.}}$	1607,96
Амортизационные отчисления	$C_{\text{ам}}$	5028,87
Прочие расходы	$C_{\text{проч}}$	21130,16
Итого:		232431,74

Таким образом, затраты на исследование составили $C = 232431,74$ руб.

5.2.7 Расчет прибыли

Прибыль от реализации проекта в зависимости от конкретной ситуации (масштаб и характер получаемого результата, степень его определенности и коммерциализации, специфика целевого сегмента рынка и т.д.) может определяться различными способами. Если исполнитель работы не располагает данными для применения «сложных» методов, то прибыль следует принять в размере 5 ÷ 20 % от полной себестоимости проекта. В нашем примере она составляет 46486,35 руб. (20 %) от расходов на разработку проекта.

5.2.8 Расчет НДС

НДС составляет 20% от суммы затрат на исследование и прибыли. В нашем случае это $(232431,74 + 46491,87) * 0,2 = 278951,23 * 0,2 = 55790,25$ руб.

5.2.9 Цена разработки НИР

Цена равна сумме полной себестоимости, прибыли и НДС, в нашем случае

$$Ц_{\text{НИР(КР)}} = 232431,74 + 46486,35 + 55790,25 = 334708,34 \text{ руб.}$$

5.3 Выводы по разделу

Проведено комплексное описание и анализ финансово-экономических аспектов выполненной работы.

Составлен перечень проводимых работ, их исполнителей и продолжительность выполнения этапов работ, составлен линейный график.

Рассчитана смета затрат на выполнение проекта, проведен расчет себестоимости и прибыли проекта.

На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что реализуемое исследование является экономически эффективным и конкурентноспособным.

6. Социальная ответственность

В данной работе освещен комплекс мер организационного, правового, технического и режимного характера, которые минимизируют негативные последствия проведения исследования, а также рассматриваются вопросы техники безопасности, охраны окружающей среды и пожарной профилактики, даются рекомендации по созданию оптимальных условий труда.

Объектом исследования выступает рабочее место инженера-математика, занимающегося исследованием RQ-системы с модулированным пуассоновским входящим потоком и обратной связью.

Рабочей зоной при разработке данного программного комплекса является учебная аудитория в Кибернетическом центре ТПУ, оборудованная системой отопления, кондиционирования воздуха, с естественным и искусственным освещением.

Рабочее место – стационарное, оборудованное персональным компьютером, оргтехникой и канцелярией.

6.1 Правовые и организационные вопросы обеспечения безопасности

Рабочие места должны соответствовать требованиям ГОСТ 12.2.032-78 «ССБТ. Рабочее место при выполнении работ сидя. Общие эргономические требования» [2] и ГОСТ 12.2.061-81 «ССБТ. Оборудование производственное. Общие требования безопасности к рабочим местам» [3].

Работа с применением персональных компьютеров сопряжена со значительными зрительными и нервно-психологическими нагрузками, что повышает требования к организации труда пользователей ПК. Конструкция рабочей мебели должна обеспечивать возможность индивидуальной регулировки, соответственно росту работающего, и создавать удобную позу. Часто используемые предметы труда и органы управления должны находиться в оптимальной рабочей зоне. Конструкция рабочего стола должна обеспечивать оптимальное размещение на рабочей поверхности используемого оборудования

с учетом его количественных и конструктивных особенностей, а также характера выполняемой работы. Высота рабочей поверхности стола должна регулироваться в пределах 680- 800 мм, при отсутствии такой возможности его высота должна быть не менее 725 мм.

Конструкция рабочего стула должна обеспечивать поддержание рациональной рабочей позы при работе, что позволит изменять позу для снижения статического напряжения мышц шейно-плечевой области и спины для предупреждения развития утомления.

С 2021 года отсутствуют нормативные документы, регулирующие вопрос установления перерывов при работе за ПЭВМ. Однако согласно ст. 108, 109 ТК РФ [1] организованные для работника перерывы должны предоставляться отдельно от обеденного времени и не должны увеличивать продолжительность рабочего дня.

6.2 Производственная безопасность

По природе возникновения вредные и опасные производственные факторы делятся на физические, химические, психофизические, биологические.

В данном случае биологические и химические факторы существенного влияния на состояние здоровья человека не оказывают, поэтому в данном разделе подробнее будут рассмотрены только физические и психофизические факторы.

Таблица 6.1. – Возможные опасные и вредные факторы

Факторы (ГОСТ 12.0.003-2015 [7])	Этапы работ	Нормативные документы
	Исследование	
1. Отклонение показателей микроклимата	+	СанПиН 2.2.4.548-96 «Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений» [4]
2. Повышенный уровень шума	+	ГОСТ 12.1.003-2014 «Система стандартов безопасности труда. Шум. Общие требования безопасности» [5]
3. Недостаточная освещенность рабочей зоны	+	ГОСТ 12.2.061-81 «Система стандартов безопасности труда. Общие требования безопасности к рабочим местам» [3]
4. Повышенный уровень электромагнитных излучений	+	ГОСТ Р 54148-2010 «Воздействие на человека электромагнитных полей от бытовых и аналогичных электрических приборов» [6]
5. Статические физические перегрузки	+	ГОСТ 12.2.032-78 «Система стандартов безопасности труда. Рабочее место при выполнении работ сидя» [2]
6. Нервно-психические перегрузки	+	ГОСТ 12.0.003-2015 «Система стандартов безопасности труда. Опасные и вредные производственные факторы» [7]
7. Опасность поражения электрическим током	+	ГОСТ Р 58698-2019 «Защита от поражения электрическим током. Общие положения для электроустановок и электрооборудования» [8]
8. Опасность возникновения пожара вследствие короткого замыкания	+	ГОСТ 12.1.004-91 «Система стандартов безопасности труда. Пожарная безопасность. Общие требования» [9]

6.2.1 Отклонение показателей микроклимата

Энергетические затраты организма измеряются в ккал/ч (Вт) и по затраченной энергии работы разделяются на категории. Так работа программиста относится к категории Ia – интенсивность энергозатрат до 120 ккал/ч (до 139 Вт).

Работы производятся в основном сидя и сопровождаются незначительным физическим напряжением. Допустимые параметры микроклимата на рабочем месте для категории Ia приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2. Оптимальные величины показателей микроклимата на рабочих местах производственных помещений по СанПиН 2.2.4.548-96 [4].

Период года	Кат. работ по уровню энергозатрат, Вт	Температура воздуха, °С	Температура поверхностей, °С	Относительная влажность воздуха, %	Скорость движения воздуха, м/с
Холодный	Ia	22-24	21-25	40-60	0,1
Теплый	Ia	23-35	22-26	40-60	0,1

Параметры микроклимата в помещении, где находится рабочее место, регулируются системой центрального отопления, кондиционером и естественной вентиляцией, и имеют следующие значения: влажность 40%, скорость движения воздуха 0,1 м/с, температура летом 23 – 25°С, зимой 21 – 23°С, что полностью соответствует нормам.

К мероприятиям по оздоровлению воздушной среды в производственном помещении относятся: правильная организация вентиляции и кондиционирования воздуха, отопление помещений. Вентиляция может осуществляться естественным и механическим путём.

6.2.2Повышенный уровень шума

Выделяют следующие источники возникновения повышенного уровня шума на рабочем месте:

- Наружный шум. Звуки доносятся из соседних помещений или с улицы.
- Технический шум. Звуки возникают в процессе функционирования оборудования.
- Человеческий шум. Источниками звука являются сами сотрудники.

Шум провоцирует музыка, разговоры, смех.

Характеристикой шума на рабочих местах являются уровни звукового давления в децибелах в октавных полосах частот со среднегеометрическими частотами 31,5; 63; 125; 250; 500; 1000; 2000; 4000; 8000 Гц, определяемые по формуле:

$$L=20 \times \lg(P / P_0),$$

где P – среднеквадратичная величина звукового давления, Па;

$P_0 = 2 \times 10^{-5}$ Па – исходное значение звукового давления в воздухе.

Шум от работающего компьютера создаёт $P = 0,05$ Па. Таким образом, $L = 68$ дБА.

Согласно требованиям ГОСТ 12.1.003-2014 [5] для рабочих мест в помещениях «...проектно-конструкторских бюро, расчётчиков, программистов вычислительных машин, в лабораториях для теоретических работ и обработки данных...» предельно допустимый уровень звукового давления составляет $L_{\max} = 75$ дБА. Шум, создаваемый работой компьютеров в аудитории, по своим характеристикам удовлетворяет санитарным нормам.

В качестве мер по снижению шума применяют подавление шума в источниках, звукоизоляция и звукопоглощение, увеличение расстояния от источника шума, проверка технического состояния и ремонт системного блока и принтера, рациональный режим труда и отдыха.

6.2.3 Недостаточная освещенность рабочей зоны

Основными причинами плохой освещенности на рабочих местах являются:

1. отсутствие контроля за соблюдением норм искусственной освещенности на рабочих местах;
2. неправильное расположение ламп общего и местного освещения по отношению к рабочей поверхности либо неправильное расположение рабочих мест по отношению к лампам;
3. нерегулярная замена старых и некачественных ламп, ресурс которых давно иссяк;
4. нерегулярная замена перегоревших ламп;
5. нерегулярная чистка плафонов ламп;
6. смешивание типов и видов ламп;
7. недостаточное количество ламп для рабочей зоны;
8. перепады напряжения в сети;

9. неправильное проектирование при строительстве либо реконструкции помещений и зданий.

Для обеспечения нормативных условий работы необходимо провести оценку освещенности рабочей зоны в соответствии с ГОСТ 12.2.061-81 [3]. Все поле зрения должно быть освещено равномерно – это является основным гигиеническим требованием.

Для создания равномерной освещённости рабочих мест светильники с люминесцентными лампами встраиваются непосредственно в потолок помещения и располагаются в равномерно-прямоугольном порядке. Наиболее желательное расположение светильников в непрерывный сплошной ряд вдоль длинной стороны помещения. Чтобы поддерживать освещение в помещении по всем соответствующим нормам, необходимо хотя бы два раза в год мыть стекла и светильники, а также по мере необходимости заменять перегоревшие лампы.

В соответствии с ГОСТ 12.2.061-81 [3] рекомендуемая искусственная освещённость для помещений, в которых выполняются работы высокой точности на светлом фоне при большом контрасте, составляет 400 лк с допустимым отклонением от -10% до +20%.

Таким образом, согласно ГОСТ 12.2.061-81 [3] реальная освещённость в аудитории Кибернетического центра, где выполнялась разработка дипломного проекта, соответствует нормативным значениям освещенности рабочей зоны.

6.2.4Повышенный уровень электромагнитных излучений

Согласно гигиеническим требованиям к персональным электронно-вычислительным машинам на расстоянии 50см вокруг ВДТ напряженность электромагнитного поля по электрической составляющей должна быть не более:

- 25 В/м при частоте в диапазоне 5 Гц ÷ 2 кГц;
- 2,5 В/м при частоте в диапазоне 2 кГц ÷ 400кГц.

Плотность магнитного потока не должна превышать:

- 250 нТл при частоте в диапазоне 5 Гц ÷ 2 кГц;
- 25 нТл при частоте в диапазоне 2 кГц ÷ 400кГц.

Основные способы защиты от электромагнитного поля:

- 1) увеличить расстояние от источника, экран монитора не должен находиться ближе 50 см от пользователя;
- 2) использование приэкранного фильтра, специального экрана, а также других средств индивидуальной защиты, которые прошли испытание в аккредитованных лабораториях и имеют соответствующий гигиенический сертификат.

На рабочем месте уровень электромагнитного излучения не превышает допустимых норм, регламентированных ГОСТ Р 54148-2010 [6]. Для минимизации вредного влияния электромагнитного излучения на организм время работы за компьютером сокращено и чередуется с временем отдыха.

6.2.5 Статические физические перегрузки

Работа с ПК тесно связана с физическими перегрузками статического характера, так как такая деятельность подразумевает сидячее положение человека.

Согласно ГОСТ 12.2.032-78 [2] касательно оптимального устройства рабочего места и минимальной физической нагрузки должны соблюдаться следующие требования:

- Конструкция рабочего стула (кресла) должна обеспечивать поддержание рациональной рабочей позы при работе на ПЭВМ, позволять изменять позу с целью снижения статического напряжения мышц шейно-плечевой области и спины для предупреждения развития утомления.
- Тип рабочего стула (кресла) следует выбирать с учетом роста пользователя, характера и продолжительности работы с ПЭВМ.
- Рабочий стул (кресло) должен быть подъемно-поворотным, регулируемым по высоте и углам наклона сиденья и спинки, а также расстоянию спинки от переднего края сиденья, при этом регулировка каждого параметра должна быть независимой, легко осуществляемой и иметь надежную фиксацию.

- Поверхность сиденья, спинки и других элементов стула (кресла) должна быть полумягкой, с нескользящим, слабо электризующимся и воздухопроницаемым покрытием, обеспечивающим легкую очистку от загрязнений.

6.2.6 Нервно-психические перегрузки

Для видов трудовой деятельности устанавливается 3 категории тяжести и напряженности работы с компьютером, которые определяются: для группы А - по суммарному числу считываемых знаков за рабочую смену (не более 60000 знаков за смену); для группы Б - по суммарному числу считываемых или вводимых знаков за рабочую смену (не более 40000 знаков за смену); для группы В - по суммарному времени непосредственной работы с компьютером за рабочую смену (не более 6 часов за смену).

При 8-часовой рабочей смене и работе на ПК следует устанавливать регламентированные перерывы. Для третьей категории работ — через 1,5- 2,0 часа от начала рабочей смены и через 1,5-2,0 часа после обеденного перерыва продолжительностью 20 минут каждый или продолжительностью 15 минут через каждый час работы.

6.2.7 Опасность поражения электрическим током

Согласно ГОСТ Р 58698-2019 [8] «Защита от поражения электрическим током. Общие положения для электроустановок и электрооборудования», рабочее место должно находиться в безопасной зоне, в котором нет таких условий, как повышенная влажность (относительная влажность воздуха длительно превышает 75%), высокая температура (более 35°C), токопроводящая пыль, токопроводящие полы, возможность одновременного соприкосновения к имеющим соединения с землей металлическим элементам и металлическим корпусам электрооборудования.

Специфическая опасность — корпуса ПК и прочего оборудования, оказавшегося под напряжением в результате повреждения или пробоя изоляции, не подают каких-либо сигналов, которые предупреждают человека об опасности.

Причинами электропоражений являются: провода с поврежденной изоляцией, розетки сети без предохранительных кожухов.

Для защиты от поражения электрическим током все токоведущие части защищены от случайных прикосновений кожухами, корпус устройства должен быть заземлен. Заземление выполняется изолированным медным проводом сечением 1.5 мм, который присоединяется к общей шине заземления с общим сечением 48 мм при помощи сварки. Общая шина присоединяется к заземлению, сопротивление которого не должно превышать 4 Ом.

Рабочее место программиста исследователя оборудовано таким образом, чтобы исключить взаимное соприкосновение кабелей и шнуров питания соседних компьютеров.

К организационно-техническим мероприятиям относится первичный инструктаж по технике безопасности. Первичный инструктаж по технике безопасности является обязательным условием для допуска к работе в данном помещении.

6.2.8 Опасность возникновения пожара вследствие короткого замыкания

Короткие замыкания в электропроводке чаще всего происходят из-за нарушения изоляции токопроводящих частей в результате механического повреждения, старения, воздействия влаги и агрессивных сред, а также неправильных действий людей. При возникновении короткого замыкания возрастает сила тока, а количество выделяющейся теплоты пропорционально квадрату тока. Тепловое воздействие на изоляцию проводов резко снижает ее механические и диэлектрические свойства. Тепловое старение изоляции наиболее часто возникает из-за перегрузки электросетей токами, превышающими длительно допустимые для данного вида и сечений проводников.

Пожарная опасность коротких замыканий электропроводки характеризуется следующими возможными проявлениями электрического тока:

воспламенением изоляции проводов и окружающих горючих предметов и веществ; способностью изоляции проводов распространять горение при поджигании ее от посторонних источников зажигания; образованием при коротком замыкании расплавленных частиц металла, поджигающих окружающие горючие материалы.

Наиболее простым решением проблемы защиты электрических устройств от чрезмерных токовых нагрузок стала установка плавких предохранителей, которые перегорали от их нагревания вследствие превышения тока определенной величины. Их основным достоинством является надежность, простота и невысокая стоимость. Однако простая конструкция предохранителя побуждает человека после сгорания плавкого элемента заменить его самостоятельно подручными материалами в виде скрепок, проволочек и даже гвоздей.

На производстве для отключения цепей, в которых возникло замыкание, используют электрические автоматы. Они намного удобнее обычных плавких предохранителей, не требуют замены сгоревшего элемента. После устранения причины замыкания и остывания тепловых элементов, автомат можно просто включить, тем самым подав напряжение в цепь.

6.3 Экологическая безопасность

Разрабатываемый проект не имеет влияния на окружающую среду, так как сам продукт разрабатывается и используется внутри персональных компьютеров. Для проведения работы использовались персональный компьютер, принтер, бумага и канцелярия.

Согласно ГОСТ Р 56397-2015 [7] «Техническая экспертиза работоспособности радиоэлектронной аппаратуры, оборудования информационных технологий, электрических машин и приборов. Общие требования», после проведения технической экспертизы, если оборудование не поддается ремонту, то оно признается неработоспособным и рекомендуется к списанию (замене); в случае отказа оборудования и нецелесообразности его

ремонта и модернизации даются рекомендации о необходимости его списания и утилизации. Утилизация включает в себя демонтаж, разборку технических узлов, разделение и сортировку конструкционных материалов, сбор и сортировку электронного лома. Полученные в результате демонтажа материалы далее отправляются на заводы переработки. Непосредственно электронный лом после специальной подготовки направляется на извлечение цветных и драгоценных металлов. Последние после аффинажа сдаются в Госфонд.

Люминесцентные лампы представляют собой опасные виды отходов. Содержание ртути в любых люминесцентных лампах составляет от трех до пяти миллиграмм ртути. С учетом этого необходимо обеспечивать условия хранения, их эксплуатации и утилизации. Согласно нормам, нужно хранить ртутьсодержащие отходы в герметичных контейнерах, доступ посторонним лицам к таким контейнерам должен быть запрещен. Транспортировка ламп на полигоны складирования должна выполняться специализирующимися организациями.

Бумажные и канцелярские отходы влияют на литосферу и могут привести к ее загрязнению. Для предотвращения этого необходимо устроить сбор макулатуры с целью вторично переработки согласно ГОСТ 10700-97 [10].

Пластик, оказываемый на литосферу значительное влияние, является материалом многих элементов ПК и канцелярских инструментов. Необходима правильная сортировка отходов и вторичная переработка.

Влияние проводимых работ на атмосферу и гидросферу незначительно.

6.4 Безопасность в чрезвычайных ситуациях

После проведения анализа возможных ЧС были выделены следующие чрезвычайные ситуации:

Техногенные – возникновение пожара, электрический шок;

Природные – землетрясение, естественные пожары;

Биолого-социальные – эпидемии, терроризм, война.

К наиболее вероятным ЧС можно отнести следующие: пожар (взрыв) в здании, авария на коммунальных системах жизнеобеспечения, землетрясение. Источниками возгорания может стать электропроводка, внутренние работающие устройства ПК, взрывоопасные предметы в помещении исследователя. Пожаровзрывоопасность веществ и материалов. Номенклатура показателей и методы их определения».

Превентивными мерами по предупреждению ЧС могут служить системы звукового и визуального оповещения персонала лаборатории и кабинетов об опасности, обучение персонала, методам работы с компьютером, наличие средств пожаротушения и информационных досок с планами эвакуации. В случае угрозы возникновения ЧС необходимо отключить электропитание, вызвать по телефону пожарную команду, эвакуировать людей из помещения согласно плану эвакуации. При наличии небольшого очага пламени можно воспользоваться подручными средствами с целью прекращения доступа воздуха к объекту возгорания. В качестве подручных средств можно использовать углекислотные огнетушители ОУ-5 высокого давления с зарядом жидкой двуокиси углерода, расположение которых можно найти на плане эвакуации людей при пожаре и других ЧС из помещения Кибернетического центра ТПУ.

6.5 Выводы по разделу

Проанализированы опасные и вредные факторы труда инженера-математика, предложены меры защиты от них, оценены условия труда рабочей зоны; рассмотрены требования по технике безопасности, электробезопасности, пожарной безопасности, экологической безопасности. В результате анализа было установлено, что аудитория Кибернетического центра ТПУ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к нему нормативными документами в области охраны труда и окружающей природной среды.

Заключение

В ходе работы были рассмотрены СМО вида $M^n|M|1$ и $MMPP|M|1$ с повторными заявками и обратной связью. Было проведено исследование этих систем с использованием аналитических, численных методов и методов асимптотического анализа, найдены параметры предельного распределения числа заявок, поступивших в систему в условии длительной задержки заявок на орбите. В результате были построены математические модели RQ-систем вида $Mn|M|1$, $MMPP|M|1$ с обратной связью, найден явный вид характеристической и производящей функций числа заявок на орбите в RQ-системе $M^n|M|1$ с обратной связью, получены распределения стационарных вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $M^n|M|1$ с использованием численных методов (матричный метод, имитационное моделирование), построены аппроксимации для распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системах вида $M^n|M|1$ и $MMPP|M|1$ с обратной связью методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите, проведено сравнение и анализ полученных результатов.

Проведен финансово-экономический анализ проведенной работы. Определен перечень проводимых работ и их исполнителей, продолжительность выполнения этапов работ, на основе чего был составлен линейный график. Рассчитана смета затрат на выполнение проекта, проведен расчет себестоимости и прибыли проекта.

Проанализированы опасные и вредные факторы труда разработчика программы-математика, предложены меры защиты от них, оценены условия труда рабочей зоны; рассмотрены требования по технике безопасности, электробезопасности, пожарной безопасности, экологической безопасности. В результате анализа было установлено, что аудитория Кибернетического центра ТПУ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к нему нормативными документами в области охраны труда и окружающей природной среды.

Литература и источники

1. Трудовой кодекс Российской Федерации от 30.12.2001 № 197-ФЗ (ред. от 01.04.2019) // Собрание законодательства РФ. - 07.01.2002. - № 1 (ч. 1). - Ст. 108, 109.
2. ГОСТ 12.2.032-78. Система стандартов безопасности труда. Рабочее место при выполнении работ сидя [Электронный ресурс]. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200003913> (дата обращения 27.04.2021).
3. ГОСТ 12.2.061-81. Система стандартов безопасности труда. Оборудование производственное. Общие требования безопасности к рабочим местам [Электронный ресурс]. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/5200228> (дата обращения 27.04.2021).
4. СанПиН 2.2.4.548-96. Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений [Электронный ресурс]. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/901704046> (дата обращения 27.04.2021).
5. ГОСТ 12.1.003-2014. Система стандартов безопасности труда. Шум. Общие требования безопасности [Электронный ресурс]. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200118606> (дата обращения 27.04.2021).
6. ГОСТ Р 54148-2010. Воздействие на человека электромагнитных полей от бытовых и аналогичных электрических приборов [Электронный ресурс]. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200083206> [Электронный ресурс].
7. ГОСТ 12.0.003-2015. Система стандартов безопасности труда. Опасные и вредные производственные факторы [Электронный ресурс]. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200136071> [Электронный ресурс].

8. ГОСТ Р 58698-2019. Защита от поражения электрическим током. Общие положения для электроустановок и электрооборудования [Электронный ресурс]. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200170001> [Электронный ресурс].
9. ГОСТ 12.1.004-91. Система стандартов безопасности труда. Пожарная безопасность. Общие требования [Электронный ресурс]. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/9051953> [Электронный ресурс].
10. ГОСТ 10700-97. Макулатура бумажная и картонная. Технические условия [Электронный ресурс]. Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200030476>
11. Alexander N. Dudin, Valentina I. Klimenok, Vladimir M. Vishnevsky. The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows. Springer Nature Switzerland AG, 2020. – 410 p.
12. Artalejo J. R. Markovian retrial queues with two-way communication / J. R. Artalejo, T. PhungDuc // Journal of Industrial & Management Optimization. — 2012. — Vol. 8, no. 4. — Pp. 781–806.
13. Phung-Duc Tuan. An efficient method for performance analysis of blended call centers with redial / Tuan Phung-Duc, Ken'ichi Kawanishi // Asia-Pacific Journal of Operational Research. — 2014. — Vol. 31, no. 02. — Pp. 1–35.
14. Phung-Duc Tuan. Two-way communication retrial queues with balanced call blending / Tuan Phung-Duc, Wouter Rogiest // International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications / Springer. — 2012. — Pp. 16–31.
15. Назаров А.А. Асимптотический анализ PQ-системы с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите [Текст] / Назаров А.А., Пауль С.В., Лизюра О.Д. // Вестник Томского Государственного Университета. – Томск, 2019. – С.13-20.

16. Elena Yu. Danilyuk. Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Customers, Collisions and Unreliable Server / Elena Yu. Danilyuk, Svetlana P. Moiseeva, Janos Sztrik // Journal of Siberian Federal University. – Krasnoyarsk, 2019.
17. Назаров А.А. Исследование RQ-системы MMPP|M|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки [Текст] / Назаров А.А., Моисеева Е.А. // Вестник Томского Государственного Университета. – Томск, 2012. – С. 19-23.
18. Моисеева Е.А. Исследование RQ-системы MMPP|M|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки [Текст] / Моисеева Е.А., Назаров А.А. // Вестник Томского Государственного Университета. – Томск, 2013. – С. 13-23.
19. Жидкова Л.А. Исследование числа занятых приборов в системе MMPP|M| ∞ с повторными обращениями [Текст] / Жидкова Л.А., Моисеева С.П. // Вестник Томского Государственного Университета. – Томск, 2014. – С. 53-62.
20. Назаров А.А. Исследование системы MMPP|GI| ∞ с бесконечным значением времени обслуживания [Текст] / Назаров А.А., Худяшова Е.Е. // Информационные технологии и математическое моделирование: материалы конференции «XVII Международная конференция имени А.Ф. Терпугова» 10-15 сентября 2018 г. – Томск, 2018. – С. 107-112.
21. Nazarov Anatoly. Heavy outgoing call asymptotics for mmp/m/1/1 retrial queue with two-way communication / Anatoly Nazarov, Tuan Phung-Duc, Svetlana Paul // International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling / Springer. — 2017. — Pp. 28–41.

Приложение А

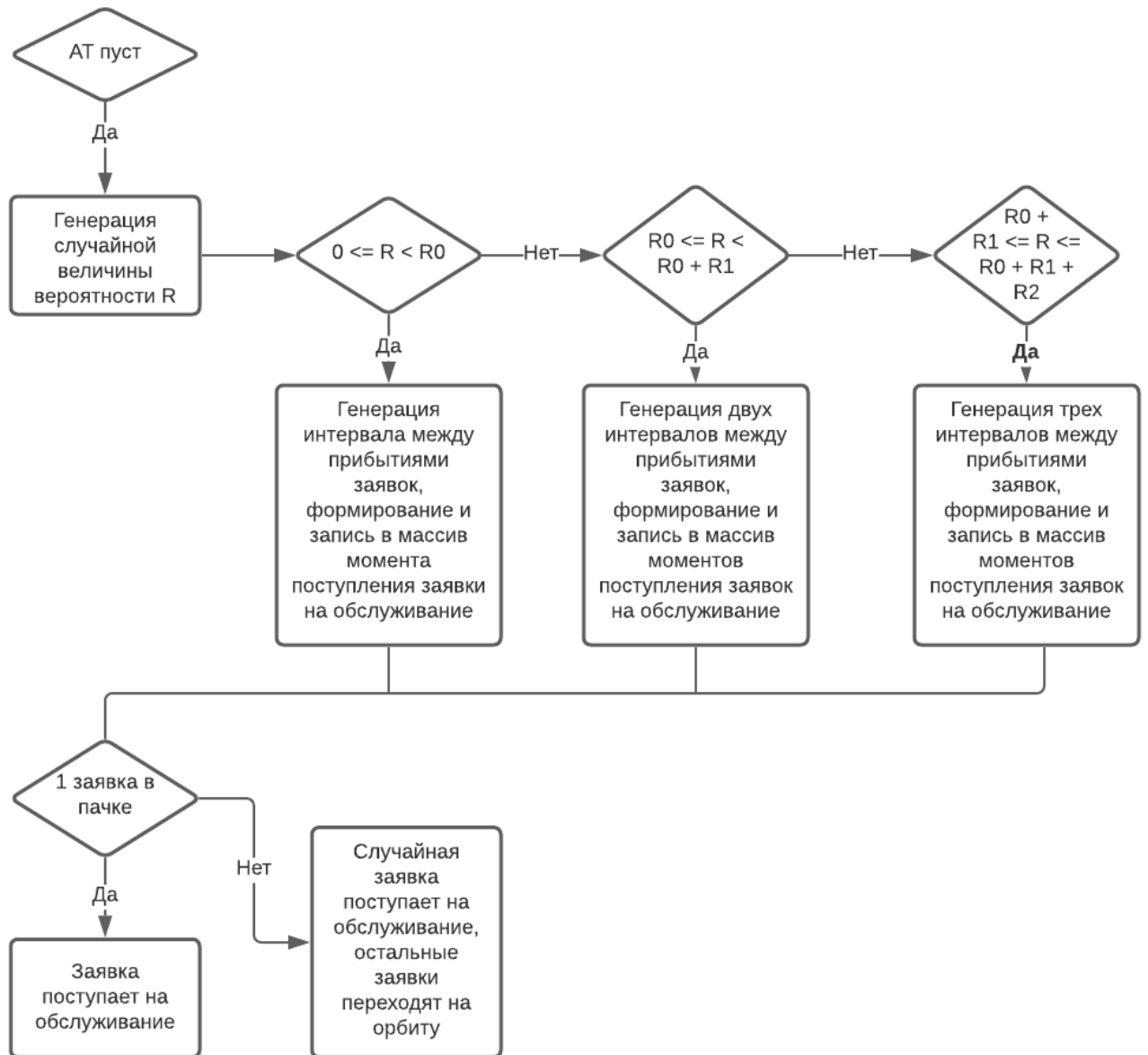


Рисунок 11. Схема алгоритма формирования входящего потока заявок

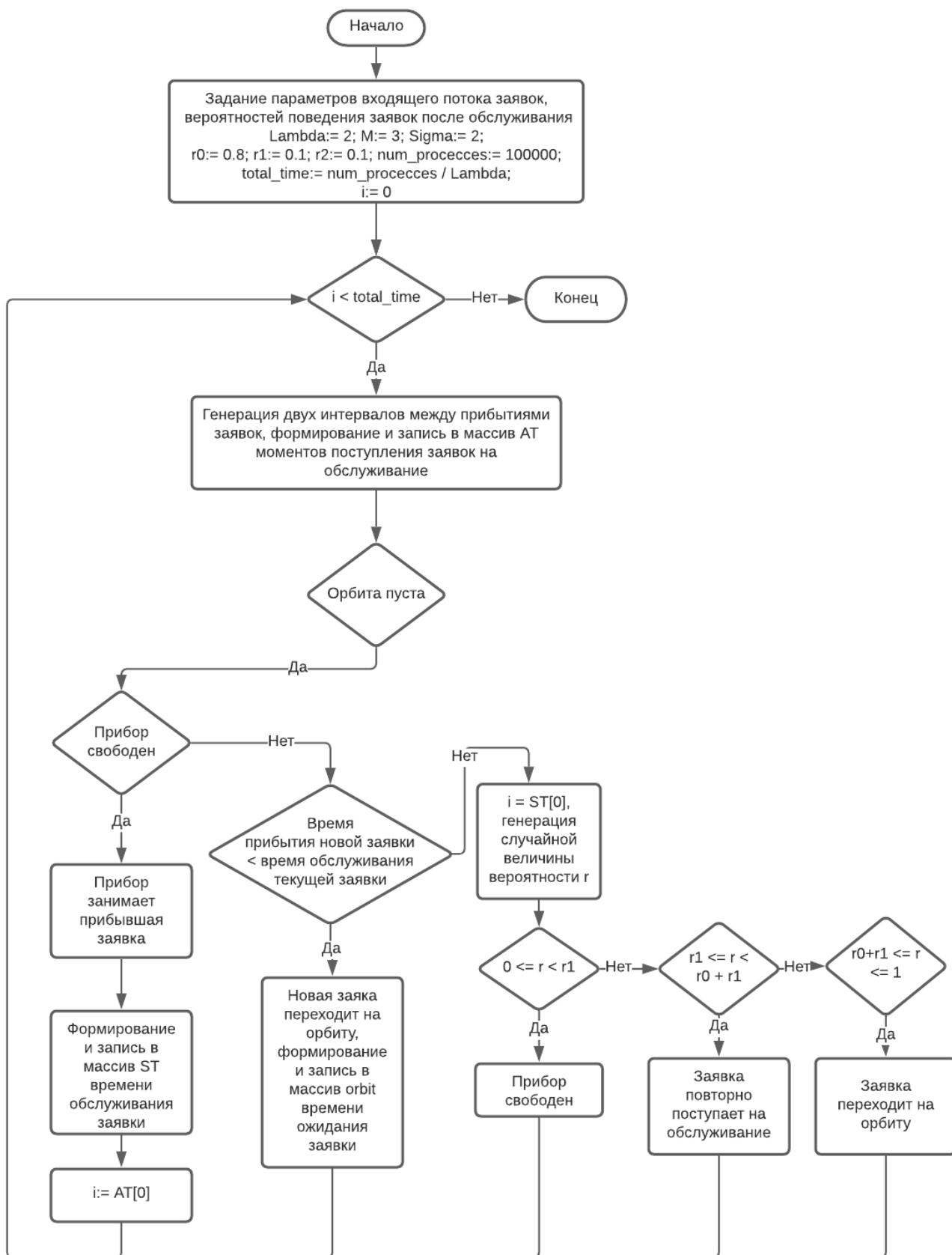


Рисунок 12. Блок схема алгоритма для случая пустой орбиты

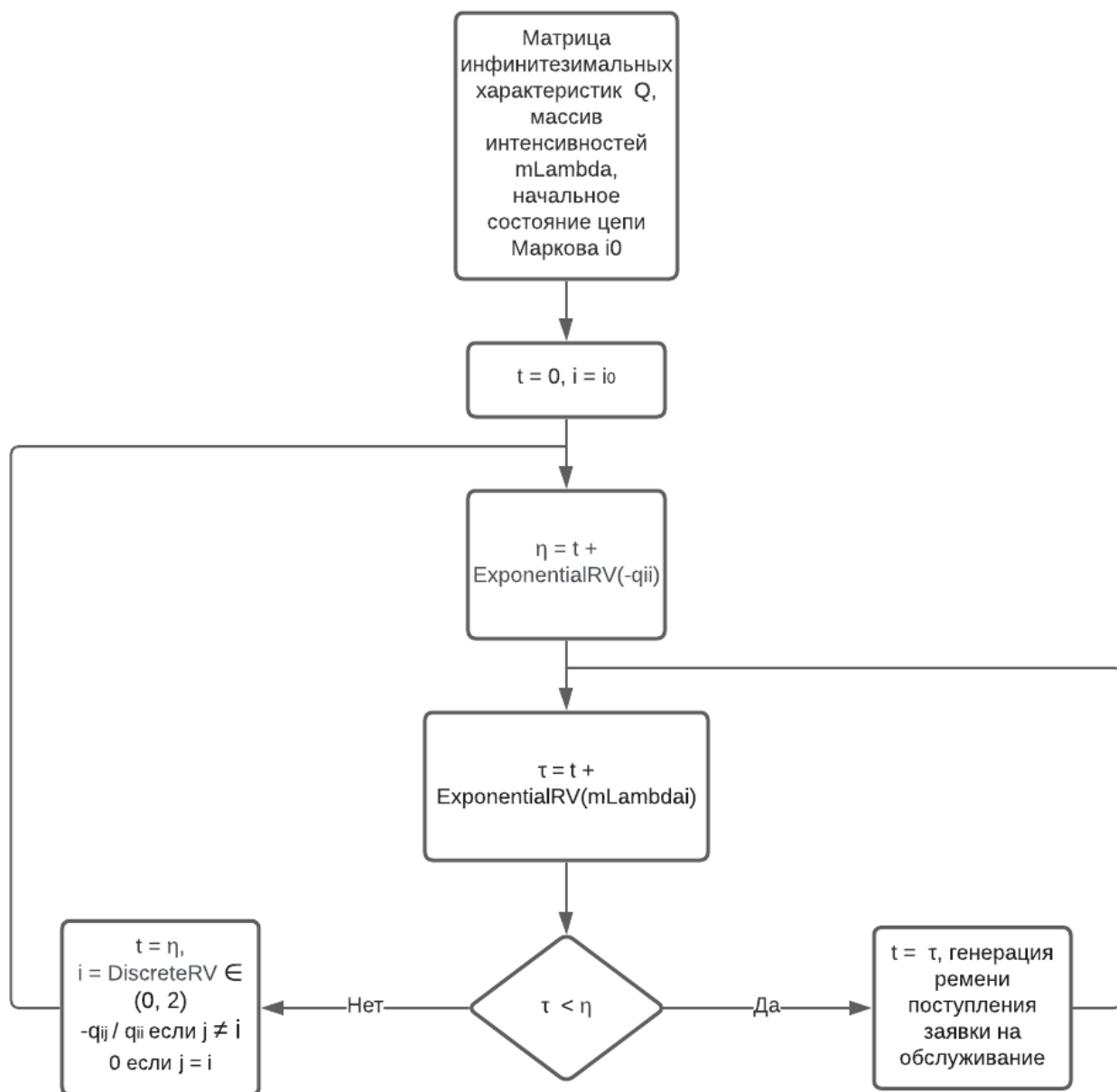


Рисунок 14. Схема алгоритма изменения интенсивности входящего потока заявок в зависимости от состояния управляющей цепи Маркова

Приложение Б

Листинг кода имитационной модели RQ-системы вида $M^n|M|1$

```
import numpy as np
import random
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import json

Lambda = 1
M = 7
Sigma = 1
i = 0
j = 0
r0 = 0.5
r1 = 0.3
r2 = 0.2

R0 = 0.5
R1 = 0.3
R2 = 0.1
R3 = 0.1

sost_prib = [0]
time = [0]
t = [0]
orbit = []
orbit_count = [0]
points = []
probabilities = []
times = []

AT = []
rAT = []
ST = []
server_busy = False
num_processes = 8000

total_time = num_processes / Lambda

# 'Система Mn | M | 1 '

while i < total_time:
    if not AT:
        r = random.random()
        if 0 <= r < R0:
            temp = np.random.exponential(1 / Lambda)
            rAT.append(temp)
        elif R0 <= r < R0+R1:
            temp = np.random.exponential(1 / Lambda)
            temp1 = np.random.exponential(1 / Lambda)
            rAT.append(temp)
            rAT.append(temp1)
        elif R0+R1 <= r < R0+R1+R2:
            temp = np.random.exponential(1 / Lambda)
            temp1 = np.random.exponential(1 / Lambda)
            temp2 = np.random.exponential(1 / Lambda)
            rAT.append(temp)
            rAT.append(temp1)
            rAT.append(temp2)
        elif R0+R1+R2 <= r <= R0+R1+R2+R3:
```

```

temp = np.random.exponential(1 / Lambda)
temp1 = np.random.exponential(1 / Lambda)
temp2 = np.random.exponential(1 / Lambda)
temp3 = np.random.exponential(1 / Lambda)
rAT.append(temp)
rAT.append(temp1)
rAT.append(temp2)
rAT.append(temp3)
if i == 0:
    if len(rAT) == 1:
        AT.append(i + rAT[0])
        s = np.random.exponential(1 / M)
        ST.append(AT[0] + s)
        p = AT[0]
        rAT.clear()
    else:
        add = random.randint(0, len(rAT)-1)
        AT.append(i + rAT[add])
        rAT.pop(add)
        for l in range(len(rAT)):
            w = np.random.exponential(1 / Sigma)
            orbit.append(rAT[l] + w)
            orbit.sort()
        s = np.random.exponential(1 / M)
        p = AT[0]
        rAT.clear()
else:
    if len(rAT) == 1:
        AT.append(p + rAT[0])
        s = np.random.exponential(1 / M)
        p = AT[0]
        rAT.clear()
    else:
        add = random.randint(1, len(rAT)-1)
        AT.append(p + rAT[add])
        rAT.pop(add)
        for l in range(len(rAT)):
            w = np.random.exponential(1 / Sigma)
            orbit.append(rAT[l] + w)
            orbit.sort()
        s = np.random.exponential(1 / M)
        p = AT[0]
        rAT.clear()
if not orbit:
    if not server_busy:
        server_busy = True
        i = AT[0]
        sost_prib.append(1)
        t.append(AT[0])

    if not ST:
        s = np.random.exponential(1 / M)
        ST.append(AT[0] + s)
        AT.pop(0)
    else:
        if AT[0] < ST[0]:
            w = np.random.exponential(1 / Sigma)
            orbit.append(AT[0] + w)
            orbit.sort()
            orbit_count.append(len(orbit))
            time.append(AT[0])
            AT.pop(0)
            if len(ST) != 1:

```

```

        ST.pop(len(ST) - 1)
    else:
        i = ST[0]
        r = random.random()
        if 0 <= r < r0:
            server_busy = False
            sost_prib.append(0)
            t.append(ST[0])
            ST.pop(0)
        elif r0 <= r < r0 + r1:
            s = np.random.exponential(1 / M)
            ST.pop(0)
            ST.insert(0, i + s)

        elif r0 + r1 <= r <= r0 + r1 + r2:
            server_busy = False
            w = np.random.exponential(1 / Sigma)
            orbit.append(ST[0] + w)
            orbit.sort()
            orbit_count.append(len(orbit))
            time.append(ST[0])
            ST.pop(0)
    else:
        if not server_busy:
            if orbit[0] < AT[0]:
                i = orbit[0]
                server_busy = True
                sost_prib.append(1)
                t.append(orbit[0])
                s = np.random.exponential(1 / M)
                ST.insert(0, orbit[0] + s)
                time.append(orbit[0])
                orbit.pop(0)
                orbit_count.append(len(orbit))
            else:
                i = AT[0]
                sost_prib.append(1)
                t.append(AT[0])
                server_busy = True
                if not ST:
                    s = np.random.exponential(1 / M)
                    ST.insert(0, AT[0] + s)
                orbit_count.append(len(orbit))
                time.append(AT[0])
                AT.pop(0)
        else:
            if ST[0] < AT[0] < orbit[0] or ST[0] < orbit[0] < AT[0]:
                i = ST[0]
                r = random.random()
                if 0 <= r < r0:
                    server_busy = False
                    sost_prib.append(0)
                    t.append(ST[0])
                    ST.pop(0)
                elif r0 <= r < r0 + r1:
                    s = np.random.exponential(1 / M)
                    ST.pop(0)
                    ST.insert(0, i + s)
                elif r0 + r1 <= r <= 1:
                    server_busy = False
                    w = np.random.exponential(1 / Sigma)

```

```

        orbit.append(ST[0] + w)
        orbit.sort()
        orbit_count.append(len(orbit))
        time.append(ST[0])
        ST.pop(0)

    elif ST[0] > AT[0] > orbit[0] or AT[0] > ST[0] > orbit[0]:
        w = np.random.exponential(1 / Sigma)
        orbit[0] = orbit[0] + w
        orbit.sort()
    elif ST[0] > orbit[0] > AT[0] or AT[0] < ST[0] < orbit[0]:
        w = np.random.exponential(1 / Sigma)
        orbit.append(AT[0] + w)
        orbit.sort()
        orbit_count.append(len(orbit))
        time.append(AT[0])
        AT.pop(0)
    if len(ST) != 1:
        ST.pop(len(ST) - 1)

```

Приложение В

Листинг кода имитационной модели RQ-системы вида MMPP|M|1

```
import numpy as np
import random
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import statistics

Lambda = 2
M = 5
Sigma = 0.1
i = 0
j = 0
r0 = 0.8
r1 = 0.1
r2 = 0.1
sost_prib = [0]
time = [0]
t = [0]
orbit = []
orbit_count = [0]
points = []
probabilities = []
times = []

AT = []
ST = []
server_busy = False
num_processes = 100000

total_time = num_processes/Lambda

choose = int(input("Выберите систему: 1) M|M|1; 2) MMPP: "))
if choose == 2:
    Q = np.array([[ -1, 0.2, 0.8], [0.5, -1.5, 1], [0.8, 1.2, -2]])
    mlambda = [1, 2, 3]
    probs = []
    sost_pot = []
    vr = []
    sost_count = 0
    eta = []
    j = 0
    p = 0
    moment_ocon = 0
    moment_nach = 0
    reserv = 0

    while i < total_time:
        if not eta:
            eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
            moment_ocon = moment_ocon+eta[0]
            temp = np.random.exponential(1 / mlambda[j])
            if temp+moment_nach<moment_ocon:
                AT.append(moment_nach + temp)
                moment_nach = AT[0]
            if not orbit:
                if not server_busy:
                    server_busy = True
                    i = AT[0]
                    sost_prib.append(1)
                    t.append(AT[0])
```

```

        if not ST:
            s = np.random.exponential(1 / M)
            ST.append(AT[0] + s)
        AT.pop(0)
    else:
        if AT[0] < ST[0]:
            w = np.random.exponential(1 / Sigma)
            orbit.append(AT[0] + w)
            orbit.sort()
            orbit_count.append(len(orbit))
            time.append(AT[0])
            AT.pop(0)
            if len(ST) != 1:
                ST.pop(len(ST) - 1)
        else:
            i = ST[0]
            r = random.random()
            if 0 <= r < r0:
                server_busy = False
                sost_prib.append(0)
                t.append(ST[0])
                ST.pop(0)
            elif r0 <= r < r0 + r1:
                s = np.random.exponential(1 / M)
                ST.pop(0)
                ST.insert(0, i + s)

            elif r0 + r1 <= r <= r0 + r1 + r2:
                server_busy = False
                w = np.random.exponential(1 / Sigma)
                orbit.append(ST[0] + w)
                orbit.sort()
                orbit_count.append(len(orbit))
                time.append(ST[0])
                ST.pop(0)
    else:
        if not server_busy:
            if orbit[0] < AT[0]:
                i = orbit[0]
                server_busy = True
                moment_nach = orbit[0]
                sost_prib.append(1)
                t.append(orbit[0])
                s = np.random.exponential(1 / M)
                ST.insert(0, orbit[0] + s)
                time.append(orbit[0])
                orbit.pop(0)
                orbit_count.append(len(orbit))
            else:
                i = AT[0]
                moment_nach = AT[0]
                sost_prib.append(1)
                t.append(AT[0])
                server_busy = True
                if not ST:
                    s = np.random.exponential(1 / M)
                    ST.insert(0, AT[0] + s)
                    AT.pop(0)
        else:
            if ST[0] < AT[0] < orbit[0] or ST[0] < orbit[0] < AT[0]:
                i = ST[0]
                r = random.random()
                if 0 <= r < r0:

```

```

        server_busy = False
        sost_prib.append(0)
        t.append(ST[0])
        ST.pop(0)
    elif r0 <= r < r0 + r1:
        s = np.random.exponential(1 / M)
        ST.pop(0)
        ST.insert(0, i + s)
    elif r0 + r1 <= r <= 1:
        server_busy = False
        w = np.random.exponential(1 / Sigma)
        orbit.append(ST[0] + w)
        orbit.sort()
        orbit_count.append(len(orbit))
        time.append(ST[0])
        ST.pop(0)

    elif ST[0] > AT[0] > orbit[0] or AT[0] > ST[0] > orbit[0]:
        w = np.random.exponential(1 / Sigma)
        orbit[0] = orbit[0] + w
        orbit.sort()
    elif ST[0] > orbit[0] > AT[0] or AT[0] < ST[0] < orbit[0]:
        w = np.random.exponential(1 / Sigma)
        orbit.append(AT[0] + w)
        orbit.sort()
        orbit_count.append(len(orbit))
        time.append(AT[0])
        AT.pop(0)
        if len(ST) != 1:
            ST.pop(len(ST) - 1)
elif server_busy and ST[0] < moment_ocon:
    i = ST[0]
    r = random.random()
    if 0 <= r < r0:
        server_busy = False
        sost_prib.append(0)
        t.append(ST[0])
        ST.pop(0)
    elif r0 <= r < r0 + r1:
        s = np.random.exponential(1 / M)
        ST.pop(0)
        ST.insert(0, i + s)
    elif r0 + r1 <= r <= r0 + r1 + r2:
        server_busy = False
        w = np.random.exponential(1 / Sigma)
        orbit.append(ST[0] + w)
        orbit.sort()
        orbit_count.append(len(orbit))
        time.append(ST[0])
        ST.pop(0)
moment_nach = moment_ocon
AT.clear()
eta.clear()
probs.clear()
rv = random.random()
if j == 0:
    k = 1
    probs.append(float(-Q[j, k] / Q[j, j]))
    if 0 <= rv <= probs[0]:
        j = 1
        sost_pot.append(mlambda[j])
        vr.append(i)
        eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))

```



```

        moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
    elif probs[0] < rv <= 1:
        j = 2
        sost_pot.append(mlambda[j])
        vr.append(i)
        eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
        moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
    elif j == 1:
        k = 0
        probs.append(float(-Q[j, k] / Q[j, j]))
        if 0 <= rv <= probs[0]:
            j = 0
            sost_pot.append(mlambda[j])
            vr.append(i)
            eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
            moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
        elif probs[0] < rv <= 1:
            j = 2
            sost_pot.append(mlambda[j])
            vr.append(i)
            eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
            moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
    elif j == 2:
        k = 0
        probs.append(float(-Q[j, k] / Q[j, j]))
        if 0 <= rv <= probs[0]:
            j = 0
            vr.append(i)
            eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
            moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
        elif probs[0] < rv <= 1:
            j = 1
            sost_pot.append(mlambda[j])
            vr.append(i)
            eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
            moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
elif server_busy and ST[0]>moment_ocon:
    moment_nach = moment_ocon
    AT.clear()
    eta.clear()
    probs.clear()
    rv = random.random()
    if j == 0:
        k = 1
        probs.append(float(-Q[j, k] / Q[j, j]))
        if 0 <= rv <= probs[0]:
            j = 1
            sost_pot.append(mlambda[j])
            vr.append(i)
            eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
            moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
        elif probs[0] < rv <= 1:
            j = 2
            sost_pot.append(mlambda[j])
            vr.append(i)
            eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
            moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
    elif j == 1:
        k = 0
        probs.append(float(-Q[j, k] / Q[j, j]))
        if 0 <= rv <= probs[0]:
            j = 0
            sost_pot.append(mlambda[j])

```

```

        vr.append(i)
        eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
        moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
    elif probs[0] < rv <= 1:
        j = 2
        sost_pot.append(mlambda[j])
        vr.append(i)
        eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
        moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
elif j == 2:
    k = 0
    probs.append(float(-Q[j, k] / Q[j, j]))
    if 0 <= rv <= probs[0]:
        j = 0
        vr.append(i)
        eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
        moment_ocon = moment_ocon + eta[0]
    elif probs[0] < rv <= 1:
        j = 1
        sost_pot.append(mlambda[j])
        vr.append(i)
        eta.append(np.random.exponential(1 / -Q[j, j]))
        moment_ocon = moment_ocon + eta[0]

```